Cargèse Lectures in Physics

Volume 4

Edited by
DANIEL KASTLER
Centre Universitaire de Marseille-Luminy

Authors:

H. ARAKI, H. J. BORCHERS, S. DOPLICHER, G. GALLAVOTTI,
J. GINIBRE, O. E. LANFORD III, M. E. MAYER, J. MANUCEAU,
R. POWERS, J. E. ROBERTS, D. W. ROBINSON, F. ROCCA, D. RUELLE,
M. SIRUGUE, E. STØRMER, J. A. SWIECA, A. VERBEURE, M. WINNINK

GORDON AND BREACH
Science Publishers
NEW YORK · LONDON · PARIS

Library of Congress Catalog Card Number: 65-18396

Editorial Office for Great Britain:
Gordon and Breach, Science Publishers Ltd.
12 Bloomsbury Way
London, W.C. 1

Editorial Office for France
Gordon & Breach
7–9 rue Emile Dubois
Paris 14e

Printed in Switzerland

Foreword

The present efforts towards developing field theory (the quantum theory of infinite systems) by use of operator-theoretic techniques centers around three main subjects: constructive relativistic field theory, constructive statistical mechanics and structural field theory (both relativistic and nonrelativistic). The 1969 session of the Institut d'Études Scientifiques de Cargèse was devoted to the second and third subjects, the main emphasis lying on rigorous statistical mechanics (in spite of the spectacular recent advances on constructive relativistic field theory in the hands of Glimm and Jaffé, it was felt by the organizers of the session that covering those developments in a fair way would require a session of its own, a project incompatible with the general aim of the session).

The present volume, containing lecture notes of the session mainly provided by the lecturers, hopes to offer a picture of the present status in the aforementioned subjects. I would like to thank heartily all the contributors for graciously yielding to my tyrannic demands for written texts in brief time, the basic condition for the relatively early appearance of this volume.

We thank Professor M. Lévy for allowing our group of axiomatists to use the facilities of the Institut d'Études Scientifiques de Cargèse and we aknowledge gratefully the financial support of NATO, DGRST and Ministère des Affaires Etrangères, Paris, which made possible the organization of a session of a somewhat usually large scope.

Last but not least, our thanks are due to Mesdemoiselles J. M. Colonna and M. F. Hanseler for their good will and competence in providing secretarial help, to all who helped typing the texts of the lectures, a task in which the Marseille secretarial staff had a particularly heavy share, and to Mohammed Mebkhout for the masterly preparation of a celebrated méchoui.

DANIEL KASTLER

N. B. We refrain from performing proofreading for the sake of a speedy publication. The readers puzzled by printing errors would be sent an erratum on request by the authors.

Table of Contents

ÉTATS QUASI-LIBRES

J. Manuceau, M. Sirugue, F. Rocca et A. Verbeure

Étude algébrique des états quasi-libres

J. Manuceau

Centre de Physique Théorique, C.N.R.S.,
31, chemin Joseph-Aiguier, Marseille, France

A. ÉTATS QUASI-LIBRES DES FERMIONS

1 Introduction

La notion d'«état quasi-libre» de l'algèbre de Clifford a été définie par R.T. Powers [1]. L'étude des états quasi-libres invariants de translation a été commencée par E. Balslev et A. Verbeure [2]. Ici nous poursuivons cette étude en utilisant une méthode plus puissante qui permet d'obtenir des résultats plus complets.

Dans le deuxième chapitre nous donnons quelques résultats concernant les structures complexes des espaces de Hilbert réels ainsi que la définition et les principales propriétés de la C^*-algèbre des relations d'anticommutation.

L'étude détaillée des états quasi-libres fait l'objet du troisième chapitre.

2 Préliminaires mathématiques

2.1 Structures complexes de l'espace monoparticulaire

Soit H un espace de Hilbert réel, muni du produit scalaire s. Cet espace est noté (H, s) et appelé «espace monoparticulaire».

Une structure hilbertienne s-permise de H sera définie par la donnée d'un opérateur orthogonal J de H (i.e. $s(J\psi, J\varphi) = s(\psi, \varphi)$ pour tout ψ et $\varphi \in H$), vérifiant:

$$J^2 = -1.$$

Si nous posons:

$$(\alpha + i\beta)\psi = \alpha\psi + \beta J\psi$$

$$h(\psi, \varphi) = s(\psi, \varphi) + is(J\psi, \varphi),\ \alpha \text{ et } \beta \in R,\ \psi \text{ et } \varphi \in H,$$

alors, (H, h) est un espace de Hilbert complexe. La forme bilinéaire σ définie par:

$$\sigma(\psi, \varphi) - s(J\psi, \varphi)$$

est une forme symplectique ($\forall\psi$ et $\varphi \in H$, $\sigma(\psi, \varphi) = -\sigma(\varphi, \psi)$ et $\sigma(\psi, \varphi) = 0$, $\forall\varphi \in H \Rightarrow \psi = 0$).

2.1.1 *Pour qu'un espace de Hilbert réel (H, s) admette une structure complexe s-permise, il faut et il suffit, que la dimension de H soit paire ou infinie.*

Si H est de dimension impaire, il n'admet pas de structure complexe puisqu'il n'admet pas de forme symplectique. Supposons que H soit de dimension paire ou infinie et soit $\{e_i | i \in I\}$ une base orthonormale de H. I étant de puissance paire ou infinie, admet une partition formée de deux sous-ensembles I_1 et I_2 de même puissance. Soit γ une bijection appliquant I_1 sur I_2 et pour tout $i \in I_1$ notons ε_i l'élément $e_{\gamma(i)}$. L'application linéaire de H, définie par:

$$J(e_i) = \varepsilon_i$$

$$J(\varepsilon_i) = -e_i \text{ pour tout } i \in I,$$

définit bien une structure complexe s-permise de H.

Nous dirons que J est associé à la base $\{e_i, \varepsilon_i | i \in I_1\}$ de H. Inversement, si J définit une structure complexe s-permise de H, il est aisé de construire une base $\{e_i, \varepsilon_i | i \in I\}$ de H telle que J lui soit associé.

2.1.2 *Si J_1 et J_2 définissent deux structures complexes s-permises de H, il existe un opérateur orthogonal T de H tel que:*

$$J_1 = TJ_2T^{-1}.$$

Soit $\{e_i, \varepsilon_i | i \in I\}$ (resp. $\{f_i, \varphi_i | i \in I\}$) une base orthonormale de H telle que J_1 (resp. J_2) lui soit associé. L'opérateur orthogonal T dans H défini par:

$$Te_i = f_i$$

$$T\varepsilon_i = \varphi_i \qquad \text{pour tout } i \in I,$$

prouve la proposition.

2.2 C^*-algèbre des relations d'anticommutation

Soit $A(H)$ l'algèbre tensorielle réelle, construite sur H et $\mathscr{I}(H, s)$ l'idéal bilatère engendré par les éléments de la forme

$$x\,x - s(x, x) \cdot 1$$

où 1 est l'identité de $A(H)$. L'algèbre complexifiée de

$$A(H)/\mathscr{I}(H, s)$$

est notée $\mathfrak{A}(H, s)$ et appelée «algèbre de Clifford». Soit $B(\psi)$ l'image de ψ par l'injection canonique de H dans $\mathfrak{A}(H, s)$. D'après la construction même de $\mathfrak{A}(H, s)$ il s'endéduit que

$$B: \psi \in H \to B(\psi) \in \mathfrak{A}(H, s)$$

est une injection R-linéaire telle que:

$$[B(\psi), B(\varphi)]_+ = 2s(\psi, \varphi) \cdot 1$$

pour tout ψ et $\varphi \in H$ où 1 est l'élément identité de $\mathfrak{A}(H, s)$. Il n'existe qu'une seule involution sur $\mathfrak{A}(H, s)$ telle que tous les $B(\psi)$, $\psi \in H$, soient hermitiens. De plus, il n'existe qu'une seule norme de C^*-algèbre ($\|a^*a\| = \|a\|^2$ pour tout $a \in \mathfrak{A}(H, s)$); et notons $\overline{\mathfrak{A}(H, s)}$ la C^*-algèbre des relations d'anticommutation, complétée de $\mathfrak{A}(H, s)$ pour cette norme.

La même construction que la précédente aurait pu être faite si (H, s) avait été seulement un espace préhilbertien réel. Mais comme

$$\|B(\psi)\|^2 = \|B(\psi)^* B(\psi)\| = \|B(\psi)^2\| = \|\psi\|^2,$$

on obtient

$$\overline{\mathfrak{A}(H, s)} = \overline{\mathfrak{A}(\bar{H}, s)}$$

où $\bar{H}$ est le complété de H. Par conséquent dans tout ce qui suivra nous supposerons H complet.

2.2.1 *Si* $\dim H = +\infty$, $\overline{\mathfrak{A}(H, s)}$ *est une* C^**-algèbre simple.*

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des sous espaces vectoriels de H de dimension finie. Si $E \in \mathscr{E}$, $\mathfrak{A}(E, s)$ est une algèbre de type I_{2^n} où n est la moitié de la dimension de E, elle est donc simple. Comme $\mathscr{E}$ est un ensemble filtrant (i.e. pour tout E_1 et $E_2 \in \mathscr{E}$, il existe $E_3 \in \mathscr{E}$ tel que $E_1 \cup E_2 \subset E_3$) et absorbant (i.e. $H = \bigcup_{E \in \mathscr{E}} E$) et que

$$\mathfrak{A}(H, s) = \bigcup_{E \in \mathscr{E}} \mathfrak{A}(E, s),$$

on déduit que $\overline{\mathfrak{A}(H, s)}$ est la limite inductive des algèbres simples $\{\mathfrak{A}(E, s) | E \in \mathscr{E}\}$, elle est donc simple.

Un opérateur T dans H est dit orthogonal, s'il est surjectif et s'il vérifie:

$$s(T\psi, T\varphi) = s(\psi, \varphi)$$

pour tout ψ et $\varphi \in H$. Notons $\mathcal{O}(H, s)$ le groupe des opérateurs orthogonaux de (H, s) et $\alpha(\overline{\mathfrak{A}(H, s)})$ le groupe des automorphismes de $\overline{\mathfrak{A}(H, s)}$.

2.2.2 *Pour tout* $T \in \mathcal{O}(H, s)$, *l'application qui à* $B(\psi)$ *fait correspondre* $B(T\psi)$ *peut s'étendre en un automorphisme unique* τ_T *de* $\overline{\mathfrak{A}(H, s)}$. *De plus, l'opérateur:*

$$\tau : T \in \mathcal{O}(H, s) \to \tau_T \in \alpha(\overline{\mathfrak{A}(H, s)})$$

est un monomorphisme.

Cette proposition est immédiate.

Tous les automorphismes de $\overline{\mathfrak{A}(H, s)}$ ne sont pas de ce type: si $\|\psi\| = 1$ et si $u_\psi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 + iB(\psi))$, u_ψ est un élément unitaire de $\mathfrak{A}(H, s)$ et $u_\psi B(\varphi) u_\psi^*$ n'est pas de la forme $B(\varphi')$.

3 États quasi-libres

3.1 Définition

Soit ω une forme linéaire de $\mathfrak{A}(H, s)$. On dit que ω est quasi-libre si et seulement si pour tout entier n on a

$$\omega(B(\psi_1)B(\psi_2) \dots B(\psi_{2n+1})) = 0$$

et

$$\omega(B(\psi_1)B(\psi_2)\dots B(\psi_{2n})) = \sum_{i=2}^{2n}(-1)^i\omega(B(\psi_1)B(\psi_i))\omega(B(\psi_2)\dots B(\psi_{i-1})$$
$$B(\psi_{i+1})\dots B(\psi_{2n}))$$
$$= \sum_{i=1}^{2n-1}(-1)^{i+1}\omega(B(\psi_i)B(\psi_{2n}))\omega(B(\psi_1)\dots$$
$$B(\psi_{i-1})B(\psi_{i+1})\dots B(\psi_{2n-1}))$$

où les ψ_j, $1 \leq j \leq 2n+1$ sont des éléments quelconques de H. ω est donc entièrement définie dans ce cas par les valeurs qu'elle prend sur l'ensemble

$$\{1,\, B(\psi)B(\varphi) \mid \psi \text{ et } \varphi \in H\}.$$

En remplaçant ω par $\omega/\omega(1)$ (si $\omega(1)$ est différent de 0) nous pouvons toujours nous ramener au cas où $\omega(1) = 1$. Posons

$$\omega(B(\psi)B(\varphi)) = h(\psi, \varphi) + i\sigma(\psi, \varphi)$$

où h et σ sont deux formes bilinéaires de H à valeurs réelles. La linéarité de ω et la relation

$$[B(\psi), B(\varphi)]_+ = 2s(\psi, \varphi) \cdot 1$$

impliquent:

$$\sigma(\psi, \varphi) = -\sigma(\varphi, \psi) \text{ et } \tfrac{1}{2}(h(\psi, \varphi) + h(\varphi, \psi)) = s(\psi, \varphi).$$

Ainsi ω est entièrement déterminée par la donnée de deux formes σ et h bilinéaires, à valeurs réelles, respectivement antisymétrique et à partie symétrique égale à s.

3.1.1 *Pour qu'une forme quasi-libre ω de $\mathfrak{A}(H, s)$ soit un état, il faut et il suffit que $h = s$ et $\|\sigma\| \leqslant 1$.*

Si ω est un état,

$$\omega((B(\psi) + iB(\varphi))(B(\psi) - iB(\varphi))) \geqslant 0$$

pour tout ψ et $\varphi \in H$. Par un calcul élémentaire on voit que cette condition implique

$$h = s \text{ et } |\sigma(\psi, \varphi)| \leqslant \|\psi\| \cdot \|\varphi\|.$$

La réciproque est établie par les propositions 3.3.2 et 3.3.3 où nous construisons explicitement la représentation associée à ω par la construction de Guel'fand-Naimark.

H étant complet et σ continue, il existe un opérateur borné A de H tel que

$$\sigma(\psi, \varphi) = s(A\psi, \varphi).$$

Il est évident que $A^+ = -A$ (puisque σ est antisymétrique), A^+ étant l'adjoint de A pour s et $\|A\| = \|\sigma\|$. Ainsi nous avons établie une bijection entre l'ensemble des états quasi-libres et celui des opérateurs bornés anti-hermitiens de (H, s) de norme inférieure ou égale à 1. Les états quasi-libres seront donc notés ω_A où

$$\omega_A(B(\psi)B(\varphi)) = s(\psi, \varphi) + is(A\psi, \varphi)$$

pour tout ψ et $\varphi \in H$. π_A, $\mathscr{H}_A$ et Ω_A seront respectivement la représentation, l'espace de représentation et le vecteur cyclique associés à ω_A par la construction de Guel'fand-Naimark.

3.2 États de Fock. État central

Le théorème d'existence de la décomposition polaire d'un opérateur n'utilisant que l'existence de la racine carrée positive d'un opérateur positif, une telle décomposition reste possible dans un espace réel (voir [3], appendice 3). Soit donc,

$$A = J|A|$$

la décomposition polaire de A. Les opérateurs J et $|A|$ commutent puisque A est normal et J vérifie sur le support de A:

$$J^+ = -J, \qquad J^2 = -1.$$

J définit donc une structure complexe du support de A.

Les états de Fock, ce sont les états quasi-libres ω_A où $A^2 = -1$. Nous préférerons alors la lettre J à la lettre A puisque cet opérateur définit alors une structure complexe de H.

3.2.1 *Si ω_{J_1} et ω_{J_2} sont deux états de Fock de $\overline{\mathfrak{A}(H, s)}$, il existe un élément T de $\mathscr{O}(H, s)$ tel que*

$$\omega_{J_1} = \omega_{J_2} \cdot \tau_T.$$

D'après 2.1.2, il existe un élément T de $\mathcal{O}(H, s)$ tel que

$$J_1 = T^+ J_2 T^-.$$

Donc

$$(\omega_{J_2} \cdot \tau_T)(B(\psi)B(\varphi)) = s(\psi, \varphi) + is(J_2 T\psi, T\varphi) = \omega_{J_1}(B(\psi)B(\varphi)),$$

ce qui établit la proposition.

L'automorphisme τ_T est la transformation de Bogoliubov la plus générale.

Il est bien connu que les représentations de Fock π_J sont irréductibles. Les états de Fock correspondants ω_J sont donc purs.

3.2.2 *ω_0 est l'état central de $\overline{\mathfrak{A}(H, s)}$.*

On sait que $\overline{\mathfrak{A}(H, s)}$ n'admet qu'un seul état central (ω est central si $\omega(ab) = \omega(ba)$ pour tout a et $b \in \overline{\mathfrak{A}(H, s)}$). Or il est évident que

$$\omega_0(ab) = \omega_0(ba)$$

pour tout a et b de $\mathfrak{A}(H, s)$, puisque s est symétrique et ω_0 quasi-libre. Par continuité de ω_0 cette dernière égalité est vérifiée sur $\overline{\mathfrak{A}(H, s)}$. ω_0 est donc l'état central.

3.3 Structure produit des états quasi-libres

Soit ω_A un état quasi-libre et $H = \bigoplus_{n \in N} H_n$ une décomposition de H en somme hilbertienne. Nous dirons que ω_A est un état produit pour la décomposition $\bigoplus_{n \in N} H_n$ si pour tout $n \in N$, tout $a \in \overline{\mathfrak{A}(H_n, s)}$ et tout $b \in \overline{\mathfrak{A}(H_n^\perp, s)}$, on a:

$$\omega(ab) = \omega(a)\omega(b).$$

Nous écrirons alors:

$$\omega = \bigotimes_{n \in N} \omega \mid \overline{\mathfrak{A}(H_n, s)}.$$

3.3.1 *Soit $(H_n)_{n \in N}$ une suite de sous-espaces orthogonaux de H invariants par A et de somme hilbertienne H. ω_A est alors un état produit:*

$$\omega_A = \bigotimes_{H \in N} \omega_{A_N}$$

où A_n est la restriction de A à H_n.

On est ramené immédiatement par linéarité et par continuité à prouver la relation:

$$\omega_A(XY) = \omega_A(X)\omega_A(Y) \tag{1}$$

dans le cas où:

$$X = B(\psi_1)B(\psi_2)\ldots B(\psi_q)$$

$$Y = B(\varphi_1)B(\varphi_2)\ldots B(\varphi_m)$$

avec $\psi_k \in H_n$, $k = 1, \ldots, q$ et $\varphi_p \in H_n^\perp$, $p = 1, \ldots, m$. Si q et m sont de parité différente l'égalité (1) est évidente car ω_A s'annule sur les produits impairs de $B(\psi)$, $\psi \in H$. Si q et m sont de même parité, en développant

$$\omega_A(XY) - \omega_A(X)\omega_A(Y)$$

à l'aide de la définition des états quasi-libres, on obtient une somme de produits de termes dont l'un au moins, du type

$$\omega_A(B(\psi)B(\varphi)) \text{ avec } \psi \in H_n \text{ et } \varphi \in H_n^\perp,$$

est nul en vertu des hypothèses.

3.3.2 *Tout état quasi-libre ω_A est un état produit par rapport à la décomposition de H en somme hilbertienne*

$H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$,

avec

$H_1 = \ker(1 - |A|)$

$H_2 = \ker A$

$H_3 = H \ominus (H_1 \oplus H_2)$, *où* $A = J|A|$.

Il est évident que H_1, H_2 et H_3 sont invariants par A et mutuellement orthogonaux et la conclusion résulte directement du lemme précédent. Nous avons donc:

$$\omega_A = \omega_{A_1} \otimes \omega_{A_2} \otimes \omega_{A_3}$$

Par hypothèse, $A_1^2 = -1$ et $A_2 = 0$; l'état ω_{A_1} est un état de Fock et l'état ω_{A_2} est l'état central.

3.3.3 *Un état quasi-libre est pur si et seulement s'il est un état de Fock.*

Une condition nécessaire et suffisante pour que ω_A soit pur est que les ω_{A_n} soient purs [3]. Il suffit donc de prouver le lemme suivant:

3.3.4 *Si $H_1 = H_2 = \{0\}$, ω_A n'est pas pur*

Nous définissons:

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+|A|)^{1/2}$$

$$T_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-|A|)^{1/2}$$

et soit θ_J l'opérateur de $\mathscr{H}_J$ défini par

$$[\theta_J, \pi_J(B(\psi))]_+ = 0, \text{ pour tout } \psi \in H$$

$$\text{et } \theta_J \Omega_J = \Omega_J.$$

Il est aisé de vérifier que π_A est équivalente à la représentation π dans $\mathscr{H}_J \otimes \mathscr{H}_{-J}$ définie par:

$$\pi(B(\psi)) = \pi_J(B(T_1\psi)) \otimes 1 + \theta_J \otimes \pi_{-J}(B(T_2\psi))$$

En effet, cette représentation admet pour vecteur cyclique

$$\Omega_J \otimes \Omega_{-J},$$

car T_1 et T_2 sont injectifs et l'état associé correspondant coïncide avec ω_A sur les produits $B(\psi)B(\varphi)$. Comme cet état est quasi-libre (ce qui se montre par un calcul direct sans intérêt) il est égal à ω_A. La représentation π' définie par:

$$\pi'(B(\psi)) = \theta_J \pi_J(B(T_2\psi)) \otimes \theta_{-J} - 1 \otimes \theta_{-J} \pi_{-J}(B(T_1\psi))$$

admet également pour vecteur cyclique:

$$\Omega_J \otimes \Omega_{-J}$$

et commute à π. Donc π n'est pas irréductible et ω_A n'est pas pur.

Remarque Dans [6], H n'est autre que $\mathscr{L}_2(R^3)$. Si l'on note J_0 la multiplication par i des éléments de $\mathscr{L}_2(R^3)$, J_0 est une structure complexe de $\mathscr{L}_2(R^3)$. Les états quasi-libres ω_A étudiés dans [6] sont ceux qui vérifient

$$[A, J_0]_- = 0.$$

Cette condition implique que ker A est de dimension paire ou infinie.

En fait dans [6] les états quasi-libres sont aussi notés $\omega_{A'}$. A et A' sont reliés par les relations

$$A' = \tfrac{1}{2}(1 - J_0 A),$$

$$A = J_0(2A' - 1).$$

Références A

1. R. T. Powers, *Princeton Thesis* (1967).
2. E. Balslev and A. Verbeure, *Comm. Math. Physics*.
3. J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, Gauthier-Villars, Paris (1958).
4. T. Turumaru, *Tôhoku Math. Journ.*, **4**, 242 (1952).
   A. Wulfsohn, *Bull. Sc. Math.*, 2° série, **87**, 13 (1963).
5. Z. Takeda, *Tôhoku Math. Journ.*, **7**, 67 (1955).
6. R. T. Powers and E. Størmer, *Free States of the Canonical Anticommutation Relations*, Preprint.

B. ÉTATS QUASI-LIBRES DES BOSONS

1 Introduction

La notion d'«état quasi-libre» des bosons a été introduite par D.W. Robinson [1] dans son étude de l'état fondamental du gaz de Bose. Cependant les états étudiés par D.W. Robinson, sont invariants de translation. Ici nous faisons une étude générale des états quasi-libres de la C^*-algèbre des relations de commutation $\overline{\Delta(H, \sigma)}$. La méthode utilisée permet une meilleure compréhension des problèmes.

Afin de faciliter la lecture de cette partie, dans le deuxième chapitre, nous rappelons très brièvement la définition et les principales propriétés de la C^*-algèbre des relations de commutation (voir [7]). Nous y avons rassemblé aussi tous les résultats mathématiques nécessaires à l'étude des états quasi-libres qui fait l'objet du troisième chapitre.

2 Préliminaires mathématiques

2.1 C^*-algèbre des relations de commutation

Soit (H, σ) un espace symplectique: H est un espace vectoriel réel (espace monoparticulaire) et σ une forme bilinéaire antisymétrique et régulière (c'est-à-dire, telle que $\sigma(\psi, \varphi) = 0$ pour tout $\psi \in H$ est équivalent à $\varphi = 0$) sur H. $\Delta(H, \sigma)$ est l'algèbre involutive engendrée par les éléments unitaires notés δ_ψ, $\psi \in (H, \sigma)$ et vérifiant:

$$(\delta_\psi)^* = \delta_{-\psi}$$

$$\delta_\psi \delta_\varphi = \exp\{-i\sigma(\psi, \varphi)\}\delta_{\psi+\varphi}$$

δ_0 est l'unité de cette algèbre.

L'ensemble $\mathscr{R}(H, \sigma)$ des représentations des relations de commutation est l'ensemble des représentations π de $\Delta(H, \sigma)$ telles que l'application $\lambda \in R \to \pi(\delta_{\lambda\psi})$ soit faiblement continue pour tout $\psi \in H$. Toutes ces représentations induisent la même norme sur $\Delta(H, \sigma)$ (c'est-à-dire, que pour π_1 et $\pi_2 \in \mathscr{R}(H, \sigma)$

$$\|\pi_1(X)\| = \|\pi_2(X)\|$$

pour tout $X \in \Delta(H, \sigma)$. La complétion de $\Delta(H, \sigma)$ pour cette norme est la C^*-algèbre $\overline{\Delta(H, \sigma)}$. Pour tout $\pi \in \mathscr{R}(H, \sigma)$:

$$\pi(\delta_\psi) = \exp\{iB(\psi)\}, \text{ où } B(\psi) \text{ est l'opérateur de champ.}$$

Soient H_1 et H_2 deux sous-espaces vectoriels réguliers de (H, σ) (c'est-à-dire que $\sigma | H_1 x H_1$ et $\sigma | H_2 x H_2$ restent régulières).
Supposons que $\sigma(\psi_1, \psi_2) = 0$, quels que soient $\psi_1 \in H_1$ et $\psi_2 \in H_2$. Alors, si $H = H_1 \oplus H_2$:

$$\overline{\Delta(H, \sigma)} = \overline{\Delta(H_1, \sigma)} \otimes \overline{\Delta(H_2, \sigma)} \tag{1}$$

Un opérateur bijectif T de H est dit symplectique s'il vérifie:

$$\sigma(T\psi, T\varphi) = \sigma(\psi, \varphi)$$

pour tout $\psi, \varphi \in H$. Alors l'application:

$$\tau_T : \delta_\psi \to \delta_{T\psi}, \ \psi \in H \tag{2}$$

s'étend en un automorphisme unique de $\overline{\Delta(H, \sigma)}$.

De même, pour tout élément χ du dual algébrique de H, l'application:

$$\delta_\psi \to e^{i\chi(\psi)} \delta_\psi \tag{3}$$

s'étend en un automorphisme unique ξ_χ de $\overline{\Delta(H, \sigma)}$, appelé «automorphisme de jauge de seconde espèce induit par χ».

2.2 Produits scalaires réels sur (H, σ)

On munit H de la structure uniforme définie par la famille de seminormes:

$$p_\varphi : \psi \to |\sigma(\varphi, \psi)|$$

On supposera dans tout ce qui suit que H est complet pour les suites, c'est-à-dire, que toute suite $(\varphi_n)_{n \in N}$ d'éléments de H telle que, pour tout $\psi \in H$, $(\sigma(\psi, \varphi_n))_{n \in N}$ soit une suite de Cauchy, est convergente.

En outre, soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des produits scalaires réels s de H tels que:

– $|\sigma(\psi, \varphi)|^2 \leqslant \|\psi\|_s^2 \cdot \|\psi\|_s^2$, où $\|\psi\|_s^2 = s(\psi, \psi)$ (4)

– l'extension continue σ' de σ à $\overline{H}^s$ (complété de H pour la norme $\|\cdot\|_s$) est régulière. (5)

(H, s) est alors un espace préhilbertien réel avec la norme $\|\cdot\|_s$. Nous noterons également $\|\cdot\|_s$ la norme des opérateurs bornés sur (H, s).

2.2.1 *Pour tout $s \in \mathscr{S}$, (H, s) est un espace de Hilbert réel.*

Soit ψ_1 un élément de $\overline{H}^s$. Il existe un suite $(\varphi_n)_{n \in N}$ d'éléments de H qui converge pour la norme $\|\cdot\|_s$ vers ψ_1. Par conséquent ((4) et (5)), pour tout $\xi \in H$,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma'(\varphi_n, \xi) = \sigma'(\psi_1, \xi).$$

Puisque H est complet pour les suites, (4) implique l'existence d'un élément ψ_2 de H tel que pour tout $\xi \in H$,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(\varphi_n, \xi) = \sigma(\psi_2, \xi).$$

Par suite $\sigma'(\psi_1 - \psi_2, \xi) = 0$ pour tout ξ dans H. La continuité (4) et la régularité (5) de σ' montrent alors que $\psi_1 = \psi_2 \in H$.

Pour tout $s \in \mathscr{S}$, il existe donc un opérateur borné D_s de H tel que $\sigma(\psi, \varphi) = s(D_s\psi, \varphi)$ pour tout ψ et $\varphi \in H$, et $\|D_s\|_s \leqslant 1$ d'après (4). Soit $J|D_s|$ la décomposition polaire de D_s; D_s étant un opérateur normal (car $D_s^+ = -D_s$ où D_s^+ est l'adjoint de D_s au sens de s), on a $[J, |D_s|]_- = 0$ ([5], page 935). J définit une structure hilbertienne σ-permise sur H ([2], pages 28 et 29), c'est-à-dire que si l'on définit la multiplication des éléments de H par les nombres complexes de la façon suivante:

$$(\alpha + i\beta)\psi = \alpha\psi + \beta J\psi \qquad \alpha, \beta \in R, \qquad \psi \in H$$

alors H, muni du produit scalaire:

$$h(\psi, \varphi) = s_J(\psi, \varphi) + i\sigma(\psi, \varphi)$$

où

$$s_J(\psi, \varphi) = -\sigma(J\psi, \varphi)$$

est un espace de Hilbert complexe. Pour cela il suffit de vérifier que s_J est positive. En effet D_s étant normal et injectif son domaine de valeur H_s, est dense dans H et

$$s_J(|D_s|\psi, |D_s|\psi) = -\sigma(J|D_s|\psi, |D_s|\psi) = -\sigma(D_s\psi, |D_s|\psi) =$$
$$s(D_s\psi, |D_s|D_s\psi) \geqslant 0.$$

Il est clair en outre que $s_J \in \mathscr{S}$.

L'opérateur $A_s = -D_s^{-1} = J|D_s|^{-1}$ défini sur $H_s = D_s H$, est en général non borné. En fait, A_s est borné si et seulement si

$$H_s = H.$$

Puisque $\|D_s\|_s \leq 1$, $|A_s| \geq 1$, de sorte que l'opérateur $|A_s| - 1$ est positif.

Si (H, h) est un espace de Hilbert complexe et si σ est la partie imaginaire de produit scalaire h, il est bien connu que (H, σ) est complet pour les suites. Ce qui précède montre donc que si (H, σ) est un espace symplectique complet pour les suites, il admet des structures hilbertiennes σ-permises, si et seulement si, $\mathscr{S}$ n'est pas vide.

2.2.2 *Pour tout espace symplectique (H, σ) complet pour les suites et pour toute structure hilbertienne σ-permise J de (H, σ), il existe un sous-espace fermé E de H et un opérateur symplectique Λ de H tel que*

$$H = E \oplus JE, \; \Lambda^2 = 1 \text{ et } [\Lambda, J]_+ = 0.$$

Soit $\{\varepsilon_i, \varphi_i | i \in I\}$ une base orthonormale de H, telle que J lui soit associé (i.e. $J\varepsilon_i = \varphi_i$, pour tout $i \in I$). L'application linéaire Λ définie par:

$$\Lambda\varepsilon_i = \varphi_i \text{ et } \Lambda\varphi_i = \varepsilon_i, \text{ pour tout } i \in I,$$

est hermitien orthogonal et satisfait:

$$[\Lambda, J]_+ = 0.$$

Les projecteurs:

$$P = \frac{1+\Lambda}{2} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1-\Lambda}{2}$$

sont orthogonaux complémentaires et satisfont:

$$\Lambda P = P\Lambda = P, \; \Lambda Q = Q\Lambda = -Q \text{ et } JP = QJ.$$

Alors, si $E = PH$, $JE = QH$ et $H = E \oplus JE$.

2.2.3 *Pour tout $s \in \mathscr{S}$, il existe une conjugaison Λ de $(H, s_J + i\sigma)$ telle que*

$$[\Lambda, |A_s|]_- = 0.$$

L'opérateur $|D_s|$ étant un opérateur positif, admet une décomposition spéctrale:

$$|D_s| = \int_0^{\|D_s\|_\infty} \lambda dE(\lambda).$$

Alors, H se décompose en une intégrale directe d'espaces hilbertiens:

$$H = \int_\oplus H_\lambda d\mu(\lambda)$$

et si Λ_λ est une conjugaison de H_λ, l'opérateur:

$$\Lambda = \int \Lambda_\lambda dE(\lambda)$$

est une conjugaison de H, commutant avec $|D_s|$; elle commute donc avec $|A_s|$ et $(|A_s|^{\pm} 1)$.

2.2.4 *Pour tout espace symplectique (H, σ) complet pour les suites et pour tout couple J_1 et J_2 de structures hilbertiennes σ-permises, il existe un opérateur symplectique T tel que:*

$$J_1 = T^+ J_2 T.$$

Cette proposition se démontre de la même façon que la proposition (2.1.2, partie A).

3 États quasi-libres

3.1 Définition

Soit f une application de H dans $\mathbb{C}$, telle que $f(0) = 1$; f est appelée quasi-libre si

$$\forall \psi \in H, \quad f(\psi) = \exp\{i\chi(\psi) - \tfrac{1}{2}s(\psi, \psi)\}$$

où χ est $\mathbb{R}$-linéaire de H dans $\mathbb{C}$ et s, $\mathbb{R}$-bilinéaire de $H \times H$ dans $\mathbb{C}$.

Soit f une application quasi-libre; on définit une forme linéaire ω_f sur $\overline{\Delta(H, \sigma)}$ par:

$$\omega_f(\delta_\psi) = f(\psi) \text{ quelque soit } \psi \text{ dans } H.$$

D'après ([7], 3.2.1), ω_f est un état si et seulement si

$$\sum_{k,j=1}^{n} \bar{a}_k a_j e^{i\sigma(\psi_k - \psi_j)} f(\psi_j - \psi_k) \geq 0$$

pour tout $a_k \in \mathbb{C}$, $\psi_k \in H$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que dans ce cas π_f (représentation associée à ω_f) appartient à $\mathscr{R}(H, \sigma)$ ([7], 3.2.2). Sous ces conditions ω_f est appelé «état quasi-libre». Notons Q l'ensemble des états quasi-libres. Cette définition est une généralisation de celle donnée par D. W. Robinson [1].

Pour tout $\omega_f \in Q$, le théorème de Stone implique:

$$\pi_f(d_\psi) = \exp\{iB_f(\psi)\}$$

où $B_f(\psi)$ est un opérateur auto-adjoint (non borné en général) de l'espace de représentation. B_f est linéaire et

$$\omega_f(\delta_\psi) = (\Omega_f | \exp\{iB_f(\psi)\}\Omega_f) \tag{1}$$

où Ω_f est le vecteur cyclique de π_f. De (1) on tire:

$$\chi(\psi) = (\Omega_f | B_f(\psi)\Omega_f).$$

χ étant dans le dual de H, dans tout ce qui va suivre nous la supposerons nulle car si

$$g(\psi) = \exp\{-\tfrac{1}{2}s(\psi, \psi)\}$$

alors,

$$\omega_f = \omega_g \circ \xi_\chi \text{ et } \pi_f = \pi_g \circ \xi_\chi$$

où ξ_χ est un automorphisme de jauge (2.1).

Notons Q_0 l'ensemble $\{\omega_f \in Q | \chi = 0\}$. Si $\omega_f \in Q_0$, alors

$$s(\psi_1, \psi_2) = -i\sigma(\psi_1, \psi_2) + (\Omega_f | B_f(\psi_1)B_f(\psi_2)\Omega_f)$$

et

$$s(\psi, \psi) = +(\Omega_f | B_f(\psi)^2\Omega_f)$$

Par conséquent, tout élément ω_f de Q_0 est de la forme:

$$\omega_f(\delta_\psi) = \omega_s(\delta_\psi) = \exp\{-\tfrac{1}{2}s(\psi, \psi)\}$$

où s est une forme bilinéaire symétrique de H.

3.1.1 *La forme linéaire $\omega_s \in Q_0$, si et seulement si, s vérifie* (2.2.(4)).

Si $\omega_s \in Q_0$, alors

$$(\Omega_s | B_s(\psi_1)B_s(\psi_2)\Omega_s) = s(\psi_1, \psi_2) + i\sigma(\psi_1, \psi_2).$$

ω_s étant un état on a:

$$(\Omega_s | (B_s(\psi) + iB_s(\varphi))(B_s(\psi) - iB_s(\varphi))\Omega_s) \geqslant 0$$

pour tout ψ et φ dans H. Un calcul élémentaire montre alors que s vérifie (4). Nous prouverons la réciproque, en construisant explicitement la représentation associée à ω_s par la construction de Guel'fand-Naimark (3.3.2 et 3.3.3).

La proposition 3.1.1, établit donc une bijection entre l'ensemble Q_0 et l'ensemble des produits scalaires s de H vérifiant (4).

3.2 États de Fock

Les états de Fock de $\overline{\Delta(H, \sigma)}$ sont les éléments ω_s de Q_0 tels que $s \in \mathscr{S}$ et $A_s^2 = -1$. L'opérateur A_s définit alors une structure hilbertienne σ-permise sur (H, σ). Les opérateurs de création et d'annihilation correspondants sont:

$$B_s^{\pm}(\psi) = \frac{1}{2}\{B_s(\psi) \mp iB_s(A_s\psi)\} \text{ pour tout } \psi \in H.$$

Le vecteur cyclique de π_s est noté Ω_s et vérifie:

$$B_s^{-}(\psi)\Omega_s = 0 \text{ pour tout } \psi \in H.$$

Les représentations de Fock sont irréductibles, les états de Fock sont donc purs.

3.2.1 *Si ω_1 et ω_2 sont deux états de Fock, il existe un opérateur symplectique T de (H, σ) tel que:*

$$\omega_1 = \omega_2 \circ \tau_T.$$

Cette proposition est une conséquence immédiate de 2.2.4.

3.3 Structure produit des états quasi-libres factoriels

3.3.1 *Si s est un produit scalaire de H vérifiant (4) et non (5), ω_s est un état quasi-libre non factoriel.*

Soit ψ un élément de $\overline{H}^s$ tel que:

$$\sigma'(\psi, \varphi) = 0 \text{ pour tout } \varphi \in \overline{H}^s,$$

et soit $(\psi_n)_{n \in N}$ une suite dans H convergent vers ψ. La suite des opérateurs unitaires $(\pi_s(\delta_{\psi_n}))_{n\in N}$ converge fortement vers un opérateur U: pour tout $p\in N$ et tout $\varphi\in H$,

$$\|(\pi(\delta_{\psi_n})-\pi(\delta_{\psi_{n+p}}))\hat{\delta}_\varphi\|^2=2(1-\mathscr{R}\exp\{i(\sigma(\psi_n,\psi_{n+p})-\sigma(\varphi,\psi_n)-$$

$$-\sigma(\psi_{n+p},\varphi))-\frac{1}{2}\|\psi_n-\psi_{n+p}\|^2\})$$

tend vers 0 quand n tend vers l'infini. D'après le corollaire du lemme 2.2 dans [3], U est unitaire. U commute à tous les $\pi(\delta_\varphi)$, $\varphi\in H$, à cause de la continuité forte des applications $S\to ST$ et $S\to TS$ et de la relation:

$$\pi_s(\delta_{\psi_n})\pi_s(\delta_\varphi)=\exp\{2i\sigma(\psi_n,\varphi)\}\pi_s(\delta_\varphi)\pi_s(\delta_{\psi_n}).$$

Par conséquent $U\in\pi_s(\overline{\Delta(H,\sigma)})''\cap\pi_s(\overline{\Delta(H,\sigma)})'$. Cependant U n'est pas un multiple de l'identité car si $U=\lambda 1$, alors $|\lambda|=1$, ce qui contredit:

$$|(\hat{\delta}_0|\,U\hat{\delta}_0)|=\exp\left\{-\frac{1}{2}\|\psi\|_s^2\right\}<1.$$

Donc π_s n'est pas une représentation factorielle.

3.3.2 *Quel que soit $s\in\mathscr{S}$, nous désignons par H_1 le noyau de $|D_s|-1$ et par H_2 le supplémentaire orthogonal pour s de H_1 dans H (de telle sorte que l'on a: $\overline{\Delta(H,\sigma)}=\overline{\Delta(H_1,\sigma)}\otimes\overline{\Delta(H_2,\sigma)}$). Alors $\omega_s=\omega_1\otimes\omega_2$, où $\omega_i=\omega_s|\overline{\Delta(H_i,\sigma)}$, $i=1,2$. En outre ω_1 est pur et ω_2 ne l'est pas.*

La première assertion est immédiate puisque, pour tout $\psi\in H$, on a $\psi=\psi_1+\psi_2$ où $\psi_i\in H_i$, $i=1,2$ et $\|\psi\|_s^2=\|\psi_1\|_s^2+\|\psi_2\|_s^2$, ce qui implique:

$$\omega_s(\delta_\psi)=\omega_1(\delta_{\psi_1})\omega_2(\delta_{\psi_2}).$$

ω_1 est un état de Fock (donc pur) de $\overline{\Delta(H,\sigma)}$ car $D_s|H_1=J|H_1$. La démonstration est achevée par le lemme suivant:

3.3.3 *Pour tout $s\in\mathscr{S}$, si $H_1=\{0\}$, ω_s n'est pas pur.*

L'image H_s de H par D_s étant partout dense, l'application

$$\psi\in H\to\pi_s(\delta_\psi)\in\mathscr{L}(\mathscr{H}_s)$$

fortement continue, il suffit de prouver que $\omega_s|\Delta(H_s, \sigma)$ n'est pas pur (partie I, 1.2.3). Considérons les opérateurs

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|A_s| + 1)$$

$$T_2 = \frac{\Lambda}{\sqrt{2}}(|A_s| - 1), \qquad \text{(pour } \Lambda \text{ voir 2.2.3).}$$

Ils sont définis sur H_s et ont un domaine de valeur dense dans H; cette dernière propriété est évidente pour T_1 et se déduit pour T_2 de l'hypothèse du lemme. Ceci implique, par un raisonnement identique à celui de ([3], page 648), que la représentation π de $\overline{\Delta(H_s, \sigma)}$ dans $\mathscr{H}_{sJ} \otimes \mathscr{H}_{sJ}$ définie par:

$$\pi(\delta_\psi) = \pi_{sJ}(\delta_{T_1\psi}) \otimes \pi_{sJ}(\delta_{T_2\psi}), \ \psi \in H_s$$

admet $\Omega_{sJ} \otimes \Omega_{sJ}$ pour vecteur cyclique. La représentation π' de $\overline{\Delta(H_s, \sigma)}$ dans $\mathscr{H}_{sJ} \otimes \mathscr{H}_{sJ}$ définie par:

$$\pi'(\delta_\psi) = \pi_{sJ}(\delta_{T_2\psi}) \otimes \pi_{sJ}(\delta_{T_1\psi}), \ \psi \in H_s$$

admet également $\Omega_{sJ} \otimes \Omega_{sJ}$ pour vecteur cyclique et commute à π, qui n'est donc pas irréductible. Puisque l'on a:

$$\omega_s(\delta_\psi) = (\Omega_{sJ} \otimes \Omega_{sJ} | \pi(\delta_\psi) \Omega_{sJ} \otimes \Omega_{sJ})$$

on conclut que $\omega_s|\Delta(H_s, \sigma)$ n'est pas pur.

3.3.4 *ω_s est pur si et seulement si c'est un état de Fock.*

En effet, d'après ([4], 2.2), le produit tensoriel d'états est pur, si et seulement si, chaque état est pur.

3.3.5 *Pour tout $s \in \mathscr{S}$, ω_s est un état factoriel.*

Il suffit de prouver que si $H_1 = \{0\}$, ω_s est factoriel (voir 3.3.2). Soit L l'algèbre de von Neumann engendrée par π et L' celle engendrée par π'. Mais,

$$\pi(\delta_{T_1\psi})\pi'(\delta_{T_2\psi}) \text{ est multiple de } \pi_J(\delta_\psi) \otimes 1$$

et

$$\pi(\delta_{T_2\psi})\pi'(\delta_{T_1\psi}) \text{ est multiple de } 1 \otimes \pi_J(\delta_\psi).$$

Par conséquent, tout opérateur de l'espace de représentation qui commute à π et à π' est multiple de l'unité:

$$\{L \cup L'\}' = L \cap L' = C1 .$$

Références B

1. D. W. Robinson, *Commun. Math. Phys.*, **1**, 159 (1965).
2. D. Kastler, *Commun. Math. Phys.*, **1**, 14 (1965).
3. H. Araki and E. J. Woods, *J. Math. Physics*, **4**, 637 (1963).
4. A. Guichardet, *Ann. Scient. E. N. S.*, **83**, 1 (1966).
5. J. Dieudonné, *Fondements de l'analyse moderne*, Gauthier-Villars, Paris (1963).
6. D. W. Robinson, *Commun. Math. Phys.*, **1** (1965).
7. J. Manuceau, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **2**, 139 (1968).