Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. VIII, n° 2, 1968, p. 139-161.

Section A :
Physique théorique.

C*-algèbre de relations de commutation

par

J. MANUCEAU

ABSTRACT — We construct explicitly the abstract C*-algebra generated by Weyl's operators. Its main properties and physically interesting automorphisms are studied.

I. — INTRODUCTION

Dans tout ce qui suit, nous noterons $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), le corps des réels (resp. des complexes).

Soit H un espace préhilbertien, σ la partie imaginaire du produit scalaire. σ est une forme symplectique de H, c'est-à-dire, une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire

$$(\sigma(\alpha\psi + \alpha'\psi', \varphi) = \alpha\sigma(\psi, \varphi) + \alpha'\sigma(\psi', \varphi),$$
$$\sigma(\psi, \alpha\varphi + \alpha'\varphi') = \alpha\sigma(\psi, \varphi) + \alpha'\sigma(\psi, \varphi'),$$

pour tout $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ et pour tout $\psi, \psi', \varphi, \varphi' \in$ H), antisymétrique

$$(\sigma(\psi, \varphi) = -\sigma(\varphi, \psi)$$

pour tout $\varphi, \psi \in$ H) et régulière ($\sigma(\psi, \varphi) = 0$ pour tout $\psi \in$ H, implique $\varphi = 0$). Un système de Weyl (ou représentation des relations de commutation) est une application W de H dans le groupe unitaire des opérateurs bornés agissant sur un espace de Hilbert et vérifiant les deux propriétés :

a) $W(\psi)W(\varphi) = e^{-i\sigma(\psi,\varphi)}W(\psi + \varphi)$ pour tout $\psi, \varphi \in$ H, *b*) $\lambda \in \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{W}(\lambda\psi)$ est faiblement (ou fortement) continue pour tout $\psi \in \mathrm{H}$.

Nous voyons donc que les systèmes de Weyl ne dépendent que de la structure symplectique de H. Cela nous amène à considérer par la suite un espace symplectique, c'est-à-dire, un espace vectoriel réel H muni d'une forme symplectique σ. Cet espace sera noté (H, σ). Dans certains cas nous serons amenés à considérer des structures préhilbertiennes σ-permises sur (H, σ). Une structure préhilbertienne σ-permise est donnée par un opérateur linéaire J de H vérifiant : $\mathrm{J}^2 = -1$, $\sigma(\mathrm{J}\psi, \mathrm{J}\varphi) = \sigma(\psi, \varphi)$ et $-\sigma(\mathrm{J}\psi, \psi) \geqslant 0$ pour tout $\psi, \varphi \in \mathrm{H}$. Alors en posant $i\psi = \mathrm{J}\psi$ où i est le nombre imaginaire pur et $s(\psi, \varphi) = \sigma(\mathrm{J}\psi, \varphi)$ pour tout $\psi, \varphi \in \mathrm{H}$, H devient un espace vectoriel complexe et $h = s + i\sigma$ une forme hermitienne non dégénérée de H. (H, h) est donc un espace préhilbertien et la partie imaginaire de h est précisément σ, justifiant ainsi la terminologie.

Le but principal de cet article est de construire une C*-algèbre associée à un espace symplectique (H, σ) (nous l'appellerons « C*-algèbre des relations de commutation » et la noterons $\overline{\Delta(\mathrm{H}, \sigma)}$), telle qu'il y ait une bijection entre l'ensemble des systèmes de Weyl de (H, σ) et certaines représentations de $\overline{\Delta(\mathrm{H}, \sigma)}$.

Le deuxième chapitre est consacré à la construction de $\overline{\Delta(\mathrm{H}, \sigma)}$; le troisième sera consacré aux principales propriétés de cette C*-algèbre.

Nous étudions dans le quatrième chapitre certains automorphismes de $\overline{\Delta(\mathrm{H}, \sigma)}$ ayant un intérêt physique. Une étude analogue a déjà été faite dans [*2*]. Nous en avons repris les démonstrations, plus simples dans le cadre présent.

2. — DÉFINITION DE $\overline{\Delta(\mathrm{H}, \sigma)}$

2.1. Préliminaires.

Soit (H, σ) un espace symplectique. Un sous-espace vectoriel E de H est dit régulier si σ restreinte à $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ est régulière. Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels réguliers de H, de dimension finie.

2.1.1. *$\mathscr{S}$ est un système filtrant (i. e. pour tout $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2 \in \mathscr{S}$, il existe $\mathrm{E}_3 \in \mathscr{S}$ tel que $\mathrm{E}_1 \cup \mathrm{E}_2 \subset \mathrm{E}_3$) et absorbant*

$$\left(i.\ e.\ \mathrm{H} = \bigcup_{\mathrm{E} \in \mathscr{S}} \mathrm{E}\right)$$

de H.

Cette proposition sera établie quand nous aurons prouvé que pour tout sous-espace vectoriel de dimension finie E de H, il existe un élément F de $\mathscr{S}$ tel que $E \subset F$.

Soit E un sous-espace vectoriel de dimension finie de H et e_1 un élément de E. Puisque σ est régulière, il existe $f_1 \in H$ tel que $\sigma(e_1, f_1) = 1$; on prendra f_1 dans E si possible. Notons E_1 le sous-espace vectoriel de H engendré par le couple (e_1, f_1) et E'_1 le sous-espace orthogonal à E_1 (i. e. l'ensemble des $x \in H$ tels que $\sigma(x, e_1) = \sigma(x, f_1) = 0$). Il est clair que E_1 et E'_1 sont réguliers et que $H = E_1 \oplus E'_1$. Montrons que $E = E_1 \cap E \oplus E'_1 \cap E$: si $x \in E$ alors $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E'_1$. Il reste à démontrer que $x_1 \in E$ et $x_2 \in E$. Si $f_1 \in E$, alors $x_1 = \alpha e_1 + \beta f_1$ où $\alpha = \sigma(x_1, f_1)$ et $\beta = \sigma(e_1, x_1)$ ce qui implique $x_1 \in E$ et $x_2 = x - x_1 \in E$. Si $f_1 \notin E$, alors $\sigma(x, e_1) = 0$ et comme $\sigma(x_2, e_1) = 0$ nous en déduisons que $\sigma(x_1, e_1) = 0$ donc $x_1 = \alpha e_1 \in E$ où $\alpha = \sigma(x_1, f_1)$ et $x_2 = x - x_1 \in E$. Si $E'_1 \cap E \neq \{0\}$ nous recommencerons cette construction en prenant E'_1 au lieu de H et $E'_1 \cap E$ au lieu de E. Comme E est de dimension finie, en répétant cette construction un nombre fini de fois nous obtiendrons un élément F de $\mathscr{S}$ (engendré par $e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_n, f_n$) tel que $E \subset F$.

2.2. **Définition de** $\Delta(H, \sigma)$.

Notons $\Delta(H, \sigma)$ l'ensemble des fonctions qui appliquent H dans $\mathbb{C}$ et qui s'annulent sur tous les éléments de H sauf sur un nombre fini d'entre eux.

2.2.1. $\Delta(H, \sigma)$ *muni des lois, de l'involution et de la norme suivantes :*

$$(a + b)(\psi) = a(\psi) + b(\psi)$$
$$(\alpha . a)(\psi) = \alpha . a(\psi)$$
$$(a . b)(\psi) = \sum_{\varphi \in H} a(\varphi) b(\psi - \varphi) e^{-i\sigma(\varphi, \psi)} = \sum_{\varphi \in H} a(\psi - \varphi) b(\varphi) e^{i\sigma(\varphi, \psi)}$$
$$a^*(\psi) = \overline{a(-\psi)}$$
$$\| a \|_1 = \sum_{\varphi \in H} | a(\varphi) |, \ \forall a, b \in \Delta(H, \sigma), \forall \psi \in H, \forall \alpha \in \mathbb{C},$$

est une algèbre normée involutive.

Les sommes qui interviennent dans les égalités ci-dessus ont un sens car un nombre fini seulement de termes sont non nuls. La proposition est facile à établir ; montrons seulement que $(a.b)^* = b^*.a^*$ et que $\| a.b \|_1 \leq \| a \|_1 . \| b \|_1$:

$$(a.b)^*(\psi) = \overline{(a.b)(-\psi)} = \sum_{\varphi} \overline{a(\varphi)}\,\overline{b(-\psi-\varphi)}e^{-i\sigma(\varphi,\psi)} = \sum_{\varphi} \overline{a(-\varphi)}\,\overline{b(\varphi-\psi)}e^{i\sigma(\varphi,\psi)}$$

$$= (b^*.a^*)(\psi) \text{ et } \| a.b \|_1 = \sum_{\psi\in H} \Big| \sum_{\varphi\in H} a(\varphi)b(\psi-\varphi)e^{-i\sigma(\varphi,\psi)} \Big|$$

$$\leq \sum_{\psi\in H}\sum_{\varphi\in H} | a(\varphi) | \, | b(\psi-\varphi) | \leq \| a \|_1 . \| b \|_1 .$$

Notons δ_ψ l'élément de $\Delta(H, \sigma)$ qui vérifie : $\delta_\psi(\varphi) = 0$ si $\psi \neq \varphi$ et $\delta_\psi(\psi) = 1$.

2.2.2. $\delta_\psi . \delta_\varphi = e^{-i\sigma(\psi,\varphi)}\delta_{\psi+\varphi}$; *δ_0 est l'élément neutre de $\Delta(H, \sigma)$; $(\delta_\psi)^* = \delta_{-\psi} = (\delta_\psi)^{-1}$. De plus l'ensemble $\delta = \{ \delta_\psi \mid \psi \in H \}$ est une base de $\Delta(H, \sigma)$.*

Pour démontrer la première partie de la proposition il suffit d'utiliser les définitions. δ est un système libre car

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\delta_{\psi_i} = 0 \Leftrightarrow \Big\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\delta_{\psi_i} \Big\|_1 = \sum_{i=1}^{n} | \alpha_i | = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

δ est un système générateur à cause de la définition même de $\Delta(H, \sigma)$.

2.2.3. *$\Delta(H, \sigma)$ est simple.*

Montrons que toute représentation π non dégénérée de $\Delta(H, \sigma)$ est fidèle. A cause de ([*3*], 2.2.7) nous pouvons supposer que π admet un vecteur totalisateur ψ_0. Il est clair que $\pi(\delta_0)$ est l'identité puisque

$$\pi(\delta_0)\pi(a)\psi_0 = \pi(a)\psi_0$$

pour tout $a \in \Delta(H, \sigma)$. Nous allons démontrer par récurrence que

$$\pi(\delta) = \{ \pi(\delta_\psi) \mid \psi \in H \}$$

est un système libre. Pour tout $\psi \in H$, $\pi(\delta_\psi) \neq 0$ car $\pi(\delta_{-\psi}) = \pi(\delta_\psi)^{-1}$. Supposons que tous les sous-systèmes de $\pi(\delta)$ de n éléments soient libres et que

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i\delta_{\psi_i} = 0$$

Cette dernière égalité implique

$$\pi(\delta_0) = \sum_{i=1}^{n} b_i \delta_{\varphi_i}$$

où $\varphi_i = \psi_i - \psi_{n+1}$ et $b_i = -a_i e^{i\sigma(\psi_{n+1}, \varphi_i)}$. D'où, pour tout $\psi \in \mathrm{H}$,

$$\pi(\delta_\psi)\pi(\delta_0)\pi(\delta_{-\psi}) = \pi(\delta_0),$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \pi(\delta_{\varphi_i}) = \sum_{i=1}^{n} b_i e^{-2i\sigma(\psi, \varphi_i)} \pi(\delta_{\varphi_i}).$$

L'hypothèse de récurrence implique $e^{-2i\sigma(\psi, \varphi_i)} = 1$ pour tout $\psi \in \mathrm{H}$, donc $\varphi_1 = \ldots = \varphi_n = 0$ et $\psi_1 = \ldots = \psi_{n+1}$.

La complétée $\Delta_1(\mathrm{H}, \sigma)$ de $\Delta(\mathrm{H}, \sigma)$ est une algèbre de Banach involutive. Elle est formée de toutes les fonctions a qui appliquent H dans $\mathbb{C}$ et en vérifiant $\sum_{\psi \in \mathrm{H}} |a(\psi)| < +\infty$ (cette dernière condition implique évidemment que a s'annule sur tous les éléments de H sauf sur un sous-ensemble au plus dénombrable d'entre eux).

2.2.4. $\Delta_1(\mathrm{H}, \sigma) \subset \mathrm{M}_1(\mathrm{H}, \sigma)$.

Rappelons que $\mathrm{M}_1(\mathrm{H}, \sigma)$ a été défini dans [*1*]. Il n'y a pas d'inclusion au sens ensembliste, mais nous allons construire un monomorphisme isométrique de $\Delta_1(\mathrm{H}, \sigma)$ dans $\mathrm{M}_1(\mathrm{H}, \sigma)$. Considérons l'homomorphisme défini par $\mathrm{T} : \delta_\psi \in \Delta(\mathrm{H}, \sigma) \to \delta_\psi \in \mathrm{M}_1(\mathrm{H}, \sigma)$. C'est cette confusion de notation que nous justifions. Montrons que T est isométrique. Pour tout

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{\psi_i} \in \mathrm{M}_1(\mathrm{H}, \sigma),$$

soit E un élément de $\mathscr{S}$ (ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension finie et réguliers de H) contenant $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$. Nous savons que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{\psi_i} \right\|_1 = \sup_{\substack{f \in \mathscr{C}_\infty(\mathrm{E}) \\ \|f\|_\infty = 1}} \left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\psi_i) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|.$$

Montrons que cette borne est atteinte.

Posons $\alpha_j = |\alpha_j| e^{i\theta_j}$ pour tout $j = 1, \ldots, n$. Considérons une structure préhilbertienne σ-permise quelconque sur E (elles induisent toutes la même topologie puisque dim E $< +\infty$). E étant maintenant un espace vectoriel topologique séparé nous pouvons construire des voisinages V_j des ψ_j disjoints deux à deux. Soit g_j la fonction continue à valeurs réelles qui est égale à θ_j sur ψ_j et nulle en dehors de V_j ; alors $f_j = e^{-ig_j}$ est une fonction continue telle que $\| f_j \|_\infty = 1$, $f_j(\psi_j) = e^{-i\theta_j}$ et $f_j(\psi) = 1$ si $\psi \notin V_j$. Donc $f = f_1, f_2, \ldots, f_n$ est la fonction de $\mathscr{C}_\infty(E)$ telle que $\| f \|_\infty = 1$ et

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{\psi_i} \right)(f) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|.$$

T est donc bien isométrique. Il s'étend à $\Delta_1(H, \sigma)$ en un monomorphisme isométrique.

2.3. Définition de $\overline{\Delta(H, \sigma)}$.

Soit $\mathscr{R}(H, \sigma)$ l'ensemble des représentations non dégénérées π de $\Delta(H, \sigma)$ vérifiant : $\lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \pi(\delta_{\lambda\psi})$ est faiblement (ou fortement) continue quel que soit $\psi \in H$.

2.3.1. *Pour tout* $a \in \Delta(H, \sigma)$, *le nombre*

$$\| a \| = \sup_{\pi \in \mathscr{R}} \| \pi(a) \|$$

est fini. L'application $a \rightarrow \| a \|$ *est une norme sur* $\Delta(H, \sigma)$ *vérifiant :*

$$\| ab \| \leq \| a \| . \| b \| \quad , \quad \| a^* \| = \| a \| \quad \text{et} \quad \| a^*a \| = \| a \|^2$$

quels que soient $a, b \in \Delta(H, \sigma)$.

Nous avons déjà vu dans 2.2.3 que pour toute représentation π non dégénérée de $\Delta(H, \sigma)$ et pour tout $\psi \in H$, $\pi(\delta_\psi)$ est unitaire ; par conséquent $\| \pi(\delta_\psi) \| = 1$. Ceci implique, pour tout

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{\psi_i} \in \Delta(H, \sigma), \qquad \left\| \pi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{\psi_i} \right) \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| = \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{\psi_i} \right\|_1 < +\infty.$$

L'application $a \rightarrow \| a \|$ est une norme sur $\Delta(H, \sigma)$ (2.2.3). Comme pour tout $\pi \in \mathscr{R}(H, \sigma)$, nous avons $\| \pi(a^*) \| = \| \pi(a) \|$ et $\| \pi(a^*a) \| = \| \pi(a) \|^2$ nous en déduisons : $\| a^* \| = \| a \|$ et $\| a^*a \| = \| a \|^2$. De plus, quel que soit $\pi \in \mathscr{R}(H, \sigma)$, $\| \pi(a . b) \| \leq \| \pi(a) \| . \| \pi(b) \| \leq \| a \| . \| b \|$; donc

$$\| a . b \| \leq \| a \| . \| b \|.$$

Il est clair que l'algèbre $\overline{\Delta(H, \sigma)}$ complétée de $\Delta(H, \sigma)$ pour la norme définie dans 2.3.1 est une C*-algèbre. Elle est appelée : « C*-algèbre des relations de commutation». La raison en apparaîtra au paragraphe suivant.

Si $\pi \in \mathscr{R}(H, \sigma)$, $\| \pi(a) \| \leq \| a \|$ quel que soit $a \in \Delta(H, \sigma)$. Par conséquent il existe une représentation unique π' de $\overline{\Delta(H, \sigma)}$ telle que $\pi' \mid \Delta(H, \sigma) = \pi$. Pour cela dans tout ce qui va suivre nous supposerons que les éléments de $\mathscr{R}(H, \sigma)$ sont définis sur $\overline{\Delta(H, \sigma)}$.

3. — PROPRIÉTÉS DE $\overline{\Delta(H, \sigma)}$

3.1. Représentations des relations de commutation.

Soit $\mathscr{W}(H, \sigma)$ l'ensemble des systèmes de Weyl de (H, σ).

3.1.1. *Pour tout $\pi \in \mathscr{R}(H, \sigma)$, l'application* W *définie par* $W(\psi) = \pi(\delta_\psi)$ *pour tout $\psi \in H$, est un élément de $\mathscr{W}(H, \sigma)$.*

Cette proposition se déduit immédiatement des définitions de $\mathscr{R}(H, \sigma)$ et $\mathscr{W}(H, \sigma)$. Réciproquement nous avons

3.1.2. *Quel que soit $W \in \mathscr{W}(H, \sigma)$, il existe un et un seul élément π de $\mathscr{R}(H, \sigma)$ qui vérifie : $\pi(\delta_\psi) = W(\psi)$ pour tout $\psi \in H$.*

Unicité : s'il existe $\pi \in \mathscr{R}(H, \sigma)$ vérifiant $\pi(\delta_\psi) = W(\psi)$ alors, pour tout

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{\psi_i} \in \Delta(H, \sigma), \qquad \pi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{\psi_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i W(\psi_i)$$

ce qui implique l'unicité de π.

Existence : pour tout $\sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{\psi_i} \in \Delta(H, \sigma)$ (où $\psi_i \neq \psi_j$ si $i \neq j$), l'application π définie par

$$\pi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{\psi_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i W(\psi_i)$$

est un élément de $\mathscr{R}(H, \sigma)$. En effet, l'égalité ci-dessus définit bien π car les δ_ψ sont linéairement indépendants. Les propriétés $\pi(a + b) = \pi(a) + \pi(b)$ et $\pi(a.b) = \pi(a).\pi(b)$ pour tout a, $b \in \Delta(H, \sigma)$ se déduisent de la définition de π, valable même si les ψ_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, ne sont pas tous différents : $\pi(\alpha\delta_\psi + \beta\delta_\psi) = \pi((\alpha + \beta)\delta_\psi) = (\alpha + \beta)W(\psi) = \alpha W(\psi) + \beta W(\psi)$, pour tout α, $\beta \in \mathbb{C}$ et $\psi \in H$. La propriété $\pi(\alpha a) = \alpha\pi(a)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et $a \in \Delta(H, \sigma)$ est évidente. Enfin, $\pi(a)^* = \pi(a^*)$ quel que soit $a \in \Delta(H, \sigma)$ car $W(\psi)^* = W(-\psi)$; en effet, par définition même de $\mathscr{W}(H, \sigma)$,

$$W(\psi)W(-\psi) = W(-\psi)W(\psi) = W(0)$$

qui est l'identité, puisque dans le groupe unitaire $W(0)W(0) = W(0)$.

Ces deux dernières propositions réalisent une bijection entre $\mathscr{R}(H, \sigma)$ et $\mathscr{W}(H, \sigma)$ qui à $\pi \in \mathscr{R}(H, \sigma)$ fait correspondre $W_\pi \in \mathscr{W}(H, \sigma)$ définie par $W_\pi(\psi) = \pi(\delta_\psi)$. On voit aisément que

3.2.3. *Pour tout $\pi \in \mathscr{R}(H, \sigma)$, π est cyclique (resp. irréductible) si et seulement si W_π est cyclique (resp. irréductible).*

Au lieu des systèmes de Weyl de (H, σ) nous sommes donc ramenés à étudier les représentations π de $\overline{\Delta(H, \sigma)}$ telles que $\lambda \in \mathbb{R} \to \pi(\delta_{\lambda\psi})$ soit continue pour tout $\psi \in H$ (i. e. $\pi \in \mathscr{R}(H, \sigma)$).

3.2. Formes positives de $\overline{\Delta(H, \sigma)}$.

Soit $\mathscr{F}$, l'ensemble de toutes les fonctions f appliquant H dans $\mathbb{C}$ et vérifiant

$$\sum_{k,j=1}^{n} \bar{a}_k a_j e^{i\sigma(\psi_k, \psi_j)} f(\psi_j - \psi_k) \geq 0$$

pour tout $a_k \in \mathbb{C}$, $\psi_k \in H$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et $n \in \mathbb{N}$.

3.2.1. *Pour tout $f \in \mathscr{F}$, il existe une forme positive continue unique ω_f, telle que $\omega_f(\delta_\psi) = f(\psi)$ pour tout $\psi \in H$.*

Unicité : s'il existe une forme positive ω_f de $\Delta(H, \sigma)$ telle que $\omega_f(\delta_\psi) = f(\psi)$ alors, pour tout

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{\psi_i} \in \Delta(H, \sigma), \qquad \omega_f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{\psi_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(\psi_i)$$

ce qui implique l'unicité de ω_f.

Existence : pour tout $\sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{\psi_i} \in \Delta(\mathrm{H}, \sigma)$ (où $\psi_j \neq \psi_i$ si $j \neq i$), l'application ω_f (qui applique $\Delta(\mathrm{H}, \sigma)$ dans $\mathbb{C}$) définie par

$$\omega_f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{\psi_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(\psi_i)$$

est une forme positive continue. En effet, l'égalité ci-dessus définit bien ω_f car les δ_ψ sont linéairement indépendants. La propriété

$$\omega_f(a + b) = \omega_f(a) + \omega_f(b)$$

pour tout $a, b \in \Delta(\mathrm{H}, \sigma)$ résulte de la définition de ω_f valable même si les ψ_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, ne sont pas tous distincts :

$$\omega_f(\alpha\delta_\psi + \beta\delta_\psi) = \omega_f((\alpha + \beta)\delta_\psi) = (\alpha + \beta)f(\psi) = \alpha f(\psi) + \beta f(\psi).$$

La propriété $\omega_f(\alpha a) = \alpha\omega_f(a)$ est évidente. ω_f est une forme positive puisque

$$\omega_f\left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{\psi_i}\right)^*\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{\psi_i}\right)\right) = \omega_f\left(\sum_{k,j=1}^{n} \bar{a}_k a_j e^{i\sigma(\psi_k,\psi_j)}\delta_{\psi_j-\psi_k}\right)$$

$$= \sum_{k,j=1}^{n} \bar{a}_k a_j e^{i\sigma(\psi_k,\psi_j)} f(\psi_j - \psi_k)$$

et puisque $f \in \mathscr{F}$ ([3], 2.1.2, (3) et (4)) impliquent $\overline{f(\psi)} = f(-\psi)$ et $|f(\psi)| \leq f(0)$ pour tout $\psi \in \mathrm{H}$. Cette dernière inégalité prouve la continuité de ω_f car

$$\left|\omega_f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{\psi_i}\right)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|.|f(\psi_i)| \leq f(0).\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{\psi_i}\right\|_1.$$

Pour tout $f \in \mathscr{F}$ soit π_f la représentation associée à ω_f par la construction de Guelfand-Naimark ([3], 2.4.4).

3.2.2. *Soit f un élément de $\mathscr{F}$; pour que $\pi_f \in \mathscr{R}(\mathrm{H}, \sigma)$ il faut et il suffit que l'application $\lambda \in \mathbb{R} \to f(\lambda\psi + \varphi)$ soit continue quels que soient $\psi, \varphi \in \mathrm{H}$. Alors, ω_f peut être étendue en une forme positive de $\overline{\Delta(\mathrm{H}, \sigma)}$.*

Si $\pi_f \in \mathscr{R}(\mathrm{H}, \sigma)$, alors l'application

$$\lambda \in \mathbb{R} \to e^{i\lambda\sigma(\psi,\varphi)}(\hat{\delta}_0 \mid \pi_f(\delta_{\lambda\psi})\hat{\delta}_\varphi) = f(\lambda\psi + \varphi)$$

est continue pour tout $\varphi, \psi \in \mathrm{H}$ (rappelons que $\hat{a}$ est l'image canonique de $a \in \Delta(\mathrm{H}, \sigma)$ dans l'espace de représentation H_{π_f} de π_f). Réciproquement supposons que l'application $\lambda \in \mathbb{R} \to f(\lambda\psi + \varphi)$ soit continue pour tout ψ, $\varphi \in \mathrm{H}$. Quel que soit $\mu \in \mathrm{H}_{\pi_f}$ nous savons qu'il existe un élément

$$a = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{\psi_i} \in \Delta(\mathrm{H}, \sigma) \quad \text{tel que} \quad \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \hat{\delta}_{\psi_i} - \mu \right\| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Donc

$$\| \pi_f(\delta_{\lambda\psi})\mu - \mu \| \leq 2 \| \mu - \hat{a} \| + \| \pi_f(\delta_{\lambda\psi})\hat{a} - \hat{a} \| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2 \{ \omega_f(a^*a)$$

$$- \mathscr{R}e\,\omega_f(a^*\delta_{\lambda\psi}a) \} = \frac{\varepsilon}{2} - 2 \left\{ \sum_{k,j=1}^{n} \bar{a}_k a_j e^{i\sigma(\psi_k, \psi_j)} f(\psi_j - \psi_k) \right.$$

$$\left. - \sum_{k,j=1}^{n} \bar{a}_k a_j e^{i\sigma(\psi_k, \psi_j)} e^{i\lambda\sigma(\psi_k + \psi_j, \psi)} f(\lambda\psi + \psi_j - \psi_k) \right\}$$

qui peut être majoré par ε en choisissant λ suffisamment petit, d'après l'hypothèse. La dernière partie de la proposition résulte du fait que

$$\omega_f(a) = (\hat{\delta}_0 \mid \pi_f(a)\hat{\delta}_0)$$

pour tout $a \in \Delta(\mathrm{H}, \sigma)$ et de 2.2.

Notons $\mathscr{F}_0$ l'ensemble des éléments $f \in \mathscr{F}$ tels que $\pi_f \in \mathscr{R}$.

3.2.3. *Pour toute structure préhilbertienne σ-permise de* (H, σ), *pour tout opérateur hermitien (pour la structure préhilbertienne choisie)* B *de* H *et pour tout $f \in \mathscr{F}_0$, l'application $\lambda \in \mathbb{R} \to \pi_f(\delta_{e^{i\lambda \mathrm{B}}\psi})$ (resp. $\psi \in \mathrm{H} \to \pi_f(\delta_\psi)$) est faiblement (ou fortement) continue quel que soit $\psi \in \mathrm{H}$, si et seulement si l'application $\lambda \in \mathbb{R} \to f(e^{i\lambda\mathrm{B}}\psi + \varphi)$ (resp. f) est continue pour tout $\varphi, \psi \in \mathrm{H}$.*

La démonstration de cette proposition est tout à fait analogue à celle de 3.2.2.

Notons $\mathscr{F}_\mathrm{B}$ (resp. $\mathscr{F}'$) l'ensemble des éléments f de $\mathscr{F}_0$ tels que l'application $\lambda \in \mathbb{R} \to f(\lambda\psi + \varphi)$ (resp. f) soit continue quels que soient ψ, $\varphi \in \mathrm{H}$. Évidemment $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}_\mathrm{A} \subset \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}$. Les représentations associées aux éléments de $\mathscr{F}_0$, sont toutes les représentations cycliques des relations de commutation.

Considérons une structure préhilbertienne σ-permise particulière de (H, σ) et soit s la partie réelle du produit scalaire correspondant. Soit f_s

la fonction définie par $f_s(\psi) = e^{-\frac{1}{2}s(\psi,\psi)}$ pour tout $\psi \in \mathrm{H}$. Il est démontré dans [1] que $f_s \in \mathscr{F}'$. La représentation π_{f_s} (notée aussi π_s) est appelée « représentation de Fock » (ou « représentation de Schrödinger » si $\dim \mathrm{H} < +\infty$). On sait que π_s est irréductible, ou, ce qui est équivalent, ω_{f_s} (notée aussi ω_s) est un état pur.

Supposons que $\dim \mathrm{H} < +\infty$. J. von Neumann a démontré que toutes les représentations $\pi \in \mathscr{R}(\mathrm{H}, \sigma)$ sont des sommes directes de représentations unitairement équivalentes à π_s [11]. Ceci implique : pour tout $x \in \mathrm{H}$ et tout $\pi \in \mathscr{R}(\mathrm{H}, \sigma)$, $\| \pi(x) \| = \| \pi_s(x) \| = \| x \|$ et toutes les représentations de Schrödinger sont unitairement équivalentes.

Dans le cas où la dimension de H est infinie nous pouvons avoir des représentations de Fock non unitairement équivalentes.

3.3. $\overline{\Delta(\mathrm{H}, \sigma)}$ est limite inductive de C*-algèbres.

Le système $\mathscr{S}$ étant absorbant il est évident que $\Delta(\mathrm{H}, \sigma) = \bigcup_{\mathrm{E} \in \mathscr{S}} \Delta(\mathrm{E}, \sigma)$.

3.3.1. *Pour tout* $\mathrm{E} \in \mathscr{S}$, $\overline{\Delta(\mathrm{E}, \sigma)} \subset \overline{\Delta(\mathrm{H}, \sigma)}$.

Comme $\Delta(\mathrm{E}, \sigma) \subset \Delta(\mathrm{H}, \sigma)$, pour établir la proposition il suffit de prouver que la norme de $\overline{\Delta(\mathrm{H}, \sigma)}$ (notée $\| \alpha \|$) restreinte à $\Delta(\mathrm{E}, \sigma)$ est la même que celle de $\overline{\Delta(\mathrm{E}, \sigma)}$ (notée $\| \alpha \|_{\mathrm{E}}$). Pour tout $\pi \in \mathscr{R}(\mathrm{H}, \sigma)$, il est clair que $\pi_{\mathrm{E}} = \pi \mid \Delta(\mathrm{E}, \sigma) \in \mathscr{R}(\mathrm{E}, \sigma)$. Or, d'après 3.2, pour tout $a \in \Delta(\mathrm{E}, \sigma)$,

$$\| \pi(a) \| = \| \pi_{\mathrm{E}}(a) \| = \| a \|_{\mathrm{E}}$$

ce qui prouve :

$$\| a \| = \sup_{\pi \in \mathscr{R}(\mathrm{H}, \sigma)} \| \pi(a) \| = \| a \|_{\mathrm{E}}.$$

De 3.3.1 il résulte que si E et F sont deux éléments de $\mathscr{S}$ tels que $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$, alors $\overline{\Delta(\mathrm{E}, \sigma)} \subset \overline{\Delta(\mathrm{F}, \sigma)}$. En outre, pour tout $\pi \in \mathscr{R}(\mathrm{H}, \sigma)$ et tout $a \in \Delta(\mathrm{H}, \sigma)$, $\| a \| = \| \pi(a) \|$. Cette dernière conséquence nous montre que $\overline{\Delta(\mathrm{H}, \sigma)} \subset \overline{\mathrm{M}_1(\mathrm{H}, \sigma)}$ (2.2.4 et [1]).

3.3.2. $\overline{\Delta(\mathrm{H}, \sigma)}$ *est la limite inductive de l'ensemble de C*-algèbres* $\{ \overline{\Delta(\mathrm{E}, \sigma)} \mid \mathrm{E} \in \mathscr{S} \}$.

La notion de limite inductive a été définie dans [5]. Pour établir cette proposition, il suffit de remarquer que

$$\Delta(\mathrm{H}, \sigma) = \bigcup_{\mathrm{E} \in \mathscr{S}} \Delta(\mathrm{E}, \sigma) \subset \bigcup_{\mathrm{E} \in \mathscr{S}} \overline{\Delta(\mathrm{E}, \sigma)} \subset \overline{\Delta(\mathrm{H}, \sigma)}$$

(3.3.1 et 2.1.1) ce qui prouve que $\overline{\Delta(\mathrm{H},\sigma)}$ est la complétion de $\bigcup_{\mathrm{E}\in\mathscr{S}} \overline{\Delta(\mathrm{E},\sigma)}$.

3.3.3. $\overline{\Delta(\mathrm{H},\sigma)}$ *n'est pas séparable.*

Soit π_s une représentation de Fock particulière de $\Delta(\mathrm{H},\sigma)$. Pour tout $\psi\in\mathrm{H}$ et non nul,

$$\|\delta_0-\delta_\psi\|^2=\|\pi_s(\delta_0-\delta_\psi)\|^2$$
$$=\sup_{a\in\Delta(\mathrm{H},\sigma)}\frac{\omega_s(a^*(\delta_0-\delta_{-\psi})(\delta_0-\delta_\psi)a)}{\omega_s(a^*a)}\geq 2\sup_{\varphi\in\mathrm{H}}\left\{1-\mathrm{Re}\,e^{2i\sigma(\psi,\varphi)}e^{-\frac{1}{2}s(\psi,\psi)}\geq 2\right\}.$$

Donc l'ensemble des boules ouvertes de centre δ_ψ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$ quand ψ parcourt H, forme un ensemble non dénombrable d'ouverts de $\overline{\Delta(\mathrm{H},\sigma)}$ deux à deux disjoints. Ceci prouve que $\overline{\Delta(\mathrm{H},\sigma)}$ n'est pas séparable.

3.3.4. *Pour toute structure préhilbertienne σ-permise et pour toute représentation π de* $\overline{\Delta(\mathrm{H},\sigma)}$ *telle que* $\psi\to\pi(\delta_\psi)$ *soit faiblement continue, nous avons :*

$$\pi(\overline{\Delta(\mathrm{H},\sigma)})''=\pi(\Delta(\overline{\mathrm{H}},\sigma))''$$

où $\overline{\mathrm{H}}$ *est la complétée de* H.

Si $\psi\in\overline{\mathrm{H}}-\mathrm{H}$, $\pi(\delta_\psi)$ peut être approché (pour la topologie faible), d'après l'hypothèse, par des éléments de la forme $\pi(\delta_\varphi)$. Par conséquent $\pi(\Delta(\mathrm{H},\sigma))$ est dense dans $\pi(\Delta(\overline{\mathrm{H}},\sigma))$, ce qui établit la proposition.

3.4. Décomposition de $\overline{\Delta(\mathrm{H},\sigma)}$ en produit tensoriel.

Soit $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux C*-algèbres, $\mathscr{A}\times\mathscr{B}$ leur produit tensoriel algébrique ($\mathscr{A}\times\mathscr{B}$ est donc une algèbre involutive), π_1 et π_2 deux représentations fidèles de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ respectivement. Pour tout

$$\sum_{i=1}^n a_i\times b_i\in\mathscr{A}\times\mathscr{B},$$

posons

$$\left\|\sum_{i=1}^n a_i\times b_i\right\|=\left\|\sum_{i=1}^n \pi_1(a_i)\times\pi_2(b_i)\right\|.$$

Il est clair que l'application $\alpha\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}\to\|\alpha\|$ est une norme et que l'algèbre $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ complétée de $\mathscr{A}\times\mathscr{B}$ pour cette norme, est une C*-algèbre. T. Turumaru (*Tôhoku Math. Journ.*, 4, 1953, 242) et A. Wulfsohn

(*Bull. Sci. Math.*, **87**, 1963, 13) ont montré que cette norme est indépendante du choix de π_1 et π_2.

Deux sous-espaces vectoriels réguliers E et F de H seront dits orthogonaux, si pour tout $\psi \in \mathrm{E}$ et tout $\varphi \in \mathrm{F}$, $\sigma(\psi, \varphi) = 0$. Ceci implique évidemment $\mathrm{E} \cap \mathrm{F} = \{0\}$. Remarquons en outre que $\mathrm{E} \otimes \mathrm{F}$ est régulier.

3.4.1. *Si* E *et* F *sont deux sous-espaces vectoriels réguliers et orthogonaux de* H, *alors* $\overline{\Delta(\mathrm{E} \oplus \mathrm{F}, \sigma)} = \overline{\Delta(\mathrm{E}, \sigma)} \otimes \overline{\Delta(\mathrm{F}, \sigma)}$.

Tout d'abord, il est évident que l'application

$$\gamma : \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{\psi_i + \varphi_i} \in \Delta(\mathrm{E} \oplus \mathrm{F}, \sigma) \to \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{\psi_i} \times \delta_{\varphi_i} \in \Delta(\mathrm{E}, \sigma) \times \Delta(\mathrm{F}, \sigma),$$

est un isomorphisme algébrique. Il suffit donc de démontrer que γ est une isométrie puisque $\Delta(\mathrm{E} \oplus \mathrm{F}, \sigma)$ et $\Delta(\mathrm{E}, \sigma) \times \Delta(\mathrm{F}, \sigma)$ sont denses respectivement dans $\overline{\Delta(\mathrm{E} \oplus \mathrm{F}, \sigma)}$ et $\overline{\Delta(\mathrm{E}, \sigma)} \otimes \overline{\Delta(\mathrm{F}, \sigma)}$. Pour pouvoir calculer les normes des éléments des deux algèbres, nous allons construire des représentations de Fock particulières de $\Delta(\mathrm{E} \otimes \mathrm{F}, \sigma)$, de $\Delta(\mathrm{E}, \sigma)$ et de $\Delta(\mathrm{F}, \sigma)$. Soit J_1 (resp. J_2) un opérateur définissant une structure préhilbertienne σ-permise de E (resp. F). L'opérateur $\mathrm{J} = \mathrm{J}_1 \oplus \mathrm{J}_2(\mathrm{J}(\psi \oplus \varphi) = \mathrm{J}_1\psi \oplus \mathrm{J}_2\varphi$ pour tout $\psi \oplus \varphi \in \mathrm{E} \oplus \mathrm{F})$, définit une structure préhilbertienne σ-permise de $\mathrm{E} \oplus \mathrm{F}$; si s est la partie réelle du produit scalaire, elle est telle que : $\psi \in \mathrm{E}$ et $\varphi \in \mathrm{F}$ implique $s(\psi, \varphi) = 0$. Posons $s_1 = s|\mathrm{E}$ et $s_2 = s|\mathrm{F}$; pour tout $\psi \oplus \varphi$ et $\psi' \oplus \varphi' \in \mathrm{E} \oplus \mathrm{F}$, nous avons :

$$s(\psi \oplus \varphi, \psi' \oplus \varphi') = s_1(\psi, \psi') + s_2(\varphi, \varphi').$$

Soit π_s (resp. π_{s_1}, π_{s_2}) la représentation de Fock de $\mathrm{E} \oplus \mathrm{F}$ (resp. E, F) et H_s (resp. H_{s_1}, H_{s_2}) l'espace de représentation de π_s (resp. π_{s_1}, π_{s_2}), les éléments de H_s images canoniques des éléments de $\Delta(\mathrm{E} \oplus \mathrm{F}, \sigma)$ (resp. $\Delta(\mathrm{E}, \sigma)$, $\Delta(\mathrm{F}, \sigma)$) (voir la construction de Guelfand-Naimark ([*3*], 2.4.4)) seront notés

$$\sum_{i=1}^{n} \widehat{a_i \delta_{\psi_i + \varphi_i}} \left(\text{resp. } \sum_{i=1}^{n} a_i \widehat{\delta}_{\psi_i}^1, \sum_{i=1}^{n} a_i \widehat{\delta}_{\varphi_i}^2\right).$$

Nous allons prouver que H_s est isomorphe à $\mathrm{H}_{s_1} \otimes \mathrm{H}_{s_2}$; il suffit pour cela de montrer que l'application

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \widehat{\delta_{\psi_i \oplus \varphi_i}} \in \mathrm{H}_s \to \sum_{i=1}^{n} a_i \widehat{\delta}_{\psi_i}^1 \otimes \widehat{\delta}_{\varphi_i}^2 \in \mathrm{H}_{s_1} \otimes \mathrm{H}_{s_2}$$

est une isométrie. En effet :

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \widehat{\delta_{\psi_i+\varphi_i}} \right\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{a}_i a_j \omega_s(\delta_{\psi_i+\varphi_i}^{*} . \delta_{\psi_j+\varphi_j})$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \bar{a}_i a_j e^{i\sigma(\psi_j,\psi_j)} e^{-\frac{1}{2}s(\psi_i-\psi_j,\psi_i-\psi_j)}$$

$$e^{i\sigma(\varphi_i,\varphi_j)} e^{-\frac{1}{2}s(\varphi_i-\varphi_j,\varphi_i-\varphi_j)}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \bar{a}_i a_j \omega_{s_1}(\delta_{\psi_i}^{*}\delta_{\psi_j}) \omega_{s_2}(\delta_{\varphi_i}^{*}\delta_{\varphi_j})$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \bar{a}_i a_j (\widehat{\delta_{\psi_i}^{1}} \otimes \widehat{\delta_{\varphi_i}^{2}} \mid \widehat{\delta_{\psi_j}^{1}} \otimes \widehat{\delta_{\varphi_j}^{2}})$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \widehat{\delta_{\psi_i}^{1}} \otimes \widehat{\delta_{\varphi_j}^{2}} \right\|^2 .$$

Le caractère isométrique de γ se déduit immédiatement de :

$$\left\| \pi_s\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{\psi_i+\varphi_i} \Big)\Big(\sum_{j=1}^{m} b_j \widehat{\delta_{\psi'_j+\varphi'_j}} \Big) \right\|$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j \widehat{\delta_{\psi'_j+\psi_i+\varphi'_j+\varphi_i}} \right\|$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j \widehat{\delta_{\psi'_j+\psi_i}^{1}} \otimes \widehat{\delta_{\varphi'_j+\varphi_i}^{2}} \right\|$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j \pi_{s_1}(\delta_{\psi_i}) \widehat{\delta_{\psi'_j}^{1}} \otimes \pi_{s_2}(\delta_{\varphi_i}) \widehat{\delta_{\varphi'_j}^{2}} \right\|$$

$$= \left\| \Big[\sum_{i=1}^{n} a_i \pi_{s_1}(\delta_{\psi_i}) \otimes \pi_{s_2}(\delta_{\varphi_i}) \Big] \Big(\sum_{j=1}^{m} b_j \widehat{\delta_{\psi'_j}^{1}} \otimes \widehat{\delta_{\varphi'_j}^{2}} \Big) \right\|$$

Un sous-ensemble $\{ (e_i, f_i) \mid i \in \mathrm{I} \}$ de $\mathrm{H} \times \mathrm{H}$ est dit symplectique si $\sigma(e_i, f_i) = 1$ pour tout $i \in \mathrm{I}$ et $\sigma(e_i, e_j) = \sigma(f_i, f_j) = \sigma(e_i, f_j)$ si $i \neq j$. Si de plus l'ensemble $\bigcup_{i \in I} \{ e_i, f_i \}$ est une base de H nous dirons que c'est une base symplectique.

3.4.2. *Si* H *admet une base symplectique* $\{ (e_i, f_i) \mid i \in I \}$, $\overline{\Delta(H, \sigma)}$ *se décompose en un produit infini de C*-algèbres.*

La notion de produit infini de C*-algèbres a été défini dans [5]. Notons $E_{(i_1, i_2, \ldots, i_p)}$ l'espace vectoriel engendré par $\{ e_{i_1}, f_{i_1}, \ldots, e_{i_p}, f_{i_p} \}$; évidemment $E_{(i_1, i_2, \ldots, i_p)} = E_{i_1} \oplus E_{i_2} \oplus \ldots \oplus E_{i_p}$.
Soit $\mathscr{S}'$ le sous-ensemble de $\mathscr{S}$ formé par les sous-espaces vectoriels $E_{(i_1, i_2, \ldots, i_p)}$ de H, $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ parcourant l'ensemble des parties finies de I. Puisque $\bigcup_{i \in I} \{ e_i, f_i \}$ est une base, il est évident que $\mathscr{S}'$ est un système filtrant, absorbant de H. Par une démonstration analogue à celle de 3.3.2, on montre aisément que $\Delta(H, \sigma)$ est limite inductive des C*-algèbres $\{ \overline{\Delta(E, \sigma)} \mid E \in \mathscr{S}' \}$. La proposition se déduit immédiatement de l'égalité $\overline{\Delta(E_{(i_1, i_2, \ldots, i_p)}, \sigma)} = \overline{\Delta(E_{i_1}, \sigma)} \otimes \ldots \otimes \overline{\Delta(E_{i_p}, \sigma)}$ (3.4.1 et [5]).

4. — AUTOMORPHISMES ET ANTIAUTOMORPHISMES DE $\overline{\Delta(H, \sigma)}$

4.1. Étude de S(H, σ).

Nous appellerons opérateur symplectique de (H, σ), un opérateur linéaire surjectif T de H vérifiant :

(1) $$\sigma(T\psi, T\varphi) = \sigma(\psi, \varphi) \qquad \text{pour tout} \qquad \psi, \varphi \in H.$$

Notons S(H, σ), l'ensemble des opérateurs symplectiques de (H, σ). Il est évident que pour tout $T \in S(H, \sigma)$, $T^{-1} \in S(H, \sigma)$ (grâce à (1), T est injectif, donc inversible). Comme de plus l'opérateur identité I est symplectique, S(H, σ) est un groupe multiplicatif.

4.1.1. *Pour tout* $T \in S(H, \sigma)$, *l'application* $\tau_T : \delta_\psi \to \delta_{T\psi}$ *peut s'étendre en un automorphisme unique de* $\overline{\Delta(H, \sigma)}$.

Posons par définition

$$\tau_T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{\psi_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{T\psi_i}$$

Cette application est un automorphisme isométrique de $\Delta(\mathrm{H}, \sigma)$ car :

$$- \tau_{\mathrm{T}}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{\psi_i} . \sum_{j=1}^{m} b_j\delta_{\varphi_j}\right)$$

$$= \tau_{\mathrm{T}}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j e^{-i\sigma(\psi_i,\varphi_j)}\delta_{\psi_i+\varphi_j}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j e^{-i\sigma(\mathrm{T}\psi_i,\mathrm{T}\varphi_j)}\delta_{\mathrm{T}\psi_i+\mathrm{T}\varphi_j}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{\mathrm{T}\psi_i} . \sum_{j=1}^{m} b_j\delta_{\mathrm{T}\varphi_j} = \tau_{\mathrm{T}}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{\psi_i}\right) . \tau_{\mathrm{T}}\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\delta_{\varphi_j}\right)$$

$$- \tau_{\mathrm{T}}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{\psi_i}\right)^{*} = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i\delta_{-\mathrm{T}\psi_i} = \tau_{\mathrm{T}}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{\psi_i}\right)^{*}\right).$$

$- \tau_{\mathrm{T}}^{-1} = \tau_{\mathrm{T}^{-1}}$ (évident).

$$- \left\| \tau_{\mathrm{T}}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{\psi_i}\right)\right\|_1 = \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{\mathrm{T}\psi_i}\right\|_1$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |a_i| = \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{\psi_i}\right\|_1$$

Pour montrer que τ_{T} est isométrique pour la norme de $\overline{\Delta(\mathrm{H}, \sigma)}$ il suffit de remarquer que si $\pi \in \mathscr{R}$, $\pi \circ \tau_{\mathrm{T}} \in \mathscr{R}$. En effet : pour tout

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{\psi_i} \in \Delta(\mathrm{H}, \sigma),$$

$$\left\| \tau_{\mathrm{T}}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{\psi_i}\right)\right\| = \left\|(\pi \circ \tau_{\mathrm{T}})\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{\psi_i}\right)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{\psi_i}\right\|$$

(voir démonstration de 3.3.1). τ_{T} s'étend donc en un automorphisme unique de $\overline{\Delta(\mathrm{H}, \sigma)}$ que nous continuons à noter τ_{T}.

Soit $\alpha(\overline{\Delta(\mathrm{H}, \sigma)})$ le groupe des automorphismes de $\overline{\Delta(\mathrm{H}, \sigma)}$.

4.1.2. *L'application* $\tau : \mathrm{T} \in \mathrm{S}(\mathrm{H}, \sigma) \rightarrow \tau_{\mathrm{T}} \in \alpha(\overline{\Delta(\mathrm{H}, \sigma)})$ *est un monomorphisme.*

Si $T \neq T'$, il existe $\psi \in H$ tel que $T\psi \neq T'\psi$ ce qui implique

$$\tau_T(\delta_\psi) = \delta_{T\psi} \neq \tau_{T'}(\delta_\psi) = \delta_{T'\psi}$$

d'où $\tau_T \neq \tau_{T'}$. De plus, pour tout

$$a = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{\psi_i} \in \Delta(H, \sigma)$$

et pour tout $T, T' \in S(H, \sigma)$,

$$(\tau_T \cdot \tau_{T'})(a) = \tau_T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{T'\psi_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{TT'\psi_i} = \tau_{TT'}(a) \qquad \text{et} \qquad \tau_I(a) = a.$$

$S(H, \sigma)$ sera donc considéré comme un sous-groupe multiplicatif de $\alpha(\overline{\Delta(H, \sigma)})$. Remarquons que pour toute structure préhilbertienne σ-permise définie par J, le groupe $S^J(H, \sigma)$ des opérateurs unitaires est un sous-groupe de $S(H, \sigma)$. Dans ([2], 2.5) on peut voir un exemple de sous-groupe de $S^J(H, \sigma)$.

4.2. **Étude de** AS(H, σ).

Nous appellerons opérateur antisymplectique de (H, σ), un opérateur linéaire surjectif T de H vérifiant :

$$\sigma(T\psi, T\varphi) = -\sigma(\psi, \varphi) \qquad \text{pour tout} \qquad \psi, \varphi \in H.$$

Notons $AS(H, \sigma)$, l'ensemble des opérateurs antisymplectiques de (H, σ). Il est évident que pour tout $T \in AS(H, \sigma)$, $T^{-1} \in AS(H, \sigma)$ et que

$$S(H, \sigma) \cup AS(H, \sigma)$$

est un groupe.

Nous dirons que ζ est un antiautomorphisme de $\overline{\Delta(H, \sigma)}$ si ζ est une bijection de $\overline{\Delta(H, \sigma)}$ vérifiant :

$$\zeta(\alpha a + \beta b) = \bar{\alpha}\zeta(a) + \bar{\beta}\zeta(b),$$
$$\zeta(a . b) = \zeta(a)\zeta(b)$$

et

$$\zeta(a)^* = \zeta(a^*)$$

pour tout

$$a, b \in \overline{\Delta(H, \sigma)} \qquad \text{et} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Notons $A - \alpha(\overline{\Delta(H, \sigma)})$ l'ensemble des antiautomorphismes de $\overline{\Delta(H, \sigma)}$.

4.2.1. *Pour tout* $T \in AS(H, \sigma)$, *l'application* $\tau_T : \delta_\psi \to \delta_{T\psi}$ *peut s'étendre en un antiautomorphisme unique de* $\overline{\Delta(H, \sigma)}$.

Posons par définition

$$\tau_T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{\psi_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i \delta_{T\psi_i}$$

et la démonstration de 4.2.1 se fait de façon analogue à celle de 4.1.1.

4.2.2. *L'application*

$$\tau : T \in S(H, \sigma) \cup AS(H, \sigma) \to \tau_T \in \alpha(\overline{\Delta(H, \sigma)}) \cup A - \alpha(\overline{\Delta(H, \sigma)})$$

est un monomorphisme.

Cette proposition se démontre de la même façon que 4.1.2.
Dans ([2], 3.3) on peut voir un exemple de sous-ensemble de AS(H, σ).

4.3. Groupe d'automorphismes associé à un opérateur hermitien de H.

Ce paragraphe généralise légèrement ([2], 5). Soit i un opérateur de H définissant une structure préhilbertienne σ-permise, s la partie réelle du produit scalaire et B un opérateur hermitien de H. Nous savons que le sous-groupe $\{ e^{itB} \mid t \in \mathbb{R} \}$ du groupe des opérateurs unitaires $S^i(H, \sigma)$ de H, induit un sous-groupe $\{ \tau_{e^{itB}} \mid t \in \mathbb{R} \}$ de $\alpha(\overline{\Delta(H, \sigma)})$ (4.1.1 et 4.1.2).

4.3.1. *Soit* B *un opérateur hermitien de* H *et* f *un élément de* $\mathscr{F}_B$ *tel que* $f(e^{iBt}\psi) = f(\psi)$ *pour tout* $\psi \in H$ *et tout* $t \in \mathbb{R}$ *et tel que* $\lambda \in \mathbb{R} \to f(e^{itB}\psi + \varphi)$ *soit continue pour tout* ψ, $\varphi \in H$. *Alors il existe une représentation unique unitaire continue* U_f *de* $\mathbb{R}$, *telle que*

$$\pi_f(\tau_{e^{itB}}(a)) = U(t)\pi_f(a)U(t)^* \quad \text{et} \quad U(t)\hat{a} = \widehat{\tau_{e^{itB}}(a)}$$

$\hat{a}$ *étant l'image canonique de* $a \in \overline{\Delta(H, \sigma)}$, *dans l'espace de représentation* H_{π_f}.

Il est évident par définition que $\omega_f(\tau_{e^{itB}}(a)) = \omega_f(a)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $a \in \Delta(H, \sigma)$. Cette propriété s'étend à $\overline{\Delta(H, \sigma)}$ puisque ω_f et $\tau_{e^{itB}}$ sont continus. Par conséquent la forme positive ω_f est invariante par le groupe d'automorphismes $\{ \tau_{e^{itB}} \mid t \in \mathbb{R} \}$. La proposition se démontre comme ([2], 5.1.1).

Le théorème de Stone ([8]) implique $U_f(t) = e^{itC_f}$ où C_f est un opérateur hermitien de H_{π_f} que nous appellerons « opérateur infinitésimal associé à B et à f ». Il est clair que $\hat{\hat{\delta}}_0$ (vecteur « vide ») est vecteur propre de C_f à valeur propre 0 puisque $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{U(t) - I}{t} \hat{\hat{\delta}}_0 = 0$. Notons A_f l'opérateur de champs associé à π_f (i. e. $\pi_f(\delta_\psi) = e^{iA_f(\psi)}$). Comme pour ([2], 5.1.2) nous avons

4.3.2. $$[C_f, A_f(\psi)]_- \subseteq - iA_f(iB\psi).$$

Remarquons que l'opérateur « nombre de particules » est l'opérateur infinitésimal N_f associé à 1 et à f ([2], 3.2) et que les opérateurs « impulsion-énergie » sont les quatre opérateurs infinitésimaux $\mathscr{H}_f^\mu$ ($\mu = 0, 1, 2$ et 3) associés respectivement aux opérateurs $i \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$ et à f quand $H = K_m^+$ (solutions de l'équation de Klein-Gordon à énergie positive) est muni du produit scalaire

$$h(\psi, \varphi) = \int \psi_F(\bar{k})^* \varphi_F(\bar{k}) d\Omega_m(\bar{k})$$

([10], chap. IV et V) ([2], 5.4).

4.4. Groupe des automorphismes de jauge de deuxième espèce de $\overline{\Delta(H, \sigma)}$.

Soit H′ le dual algébrique H, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions ℝ-linéaires sur H à valeurs dans ℝ. Si π est un élément de $\mathscr{R}$, le théorème de Stone (voir [6]) implique $\pi(\delta_\psi) = e^{iA(\psi)}$ où $A(\psi)$ est hermitien. A qui est ℝ-linéaire, est appelé « opérateur de champ ». La transformation de jauge de deuxième espèse la plus générale de A, est de la forme : $A \to A_\chi = A + \chi$ où $\chi \in H'$. Pour obtenir une telle transformation pour tous les éléments de $\mathscr{R}$, nous allons définir un élément de $\alpha(\overline{\Delta(H, \sigma)})$ qui transformera δ_ψ en $\zeta_\chi(\delta_\psi) = e^{i\chi(\psi)}\delta_\psi$, car

$$\pi(\zeta_\chi(\delta_\psi)) = \pi(e^{i\chi(\psi)}\delta_\psi) = e^{i[A(\psi) + \chi(\psi)]} = e^{iA_\chi(\psi)}$$

4.4.1. *Pour tout* $\chi \in H'$, *l'application* $\zeta_\chi : \delta_\psi \to e^{i\chi(\psi)}\delta_\psi$ *peut s'étendre en un automorphisme unique de* $\overline{\Delta(H, \sigma)}$.

Posons par définition

$$\zeta_\chi\left(\sum_{j=1}^{m} a_j \delta_{\psi_j} \right) = \sum_{j=1}^{n} a_j e^{i\chi(\psi_j)} \delta_{\psi_j}.$$

Cette application est un automorphisme isométrique de $\Delta(\mathrm{H}, \sigma)$ car :

$$- \zeta_\chi\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\delta_{\psi_j} . \sum_{k=1}^{m} b_k\delta_{\varphi_k}\right) = \zeta_\chi\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_j b_k e^{-i\sigma(\psi_j,\varphi_k)}\delta_{\psi_j+\varphi_k}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_j b_k e^{-i\sigma(\psi_j,\varphi_k)} e^{i\chi(\psi_j+\varphi_k)}\delta_{\psi_j+\varphi_k}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j e^{i\chi(\psi_j)}\delta_{\psi_j} . \sum_{k=1}^{m} b_k e^{i\chi(\varphi_k)}\delta_{\varphi_k}$$

$$= \zeta_\chi\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\delta_{\psi_j}\right) . \zeta_\chi\left(\sum_{k=1}^{m} b_k\delta_{\varphi_k}\right)$$

$$- \zeta_\chi\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\delta_{\psi_j}\right)^* = \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_j e^{-i\chi(\psi_j)}\delta_{-\psi_j} = \zeta_\chi\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\delta_{\psi_j}\right)^*\right)$$

$- \zeta_\chi^{-1} = \zeta_{-\chi}$ (évident)

$$- \left\| \zeta_\chi\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\delta_{\psi_j}\right)\right\|_1 = \left\|\sum_{j=1}^{n} a_j e^{i\chi(\psi_j)}\delta_{\psi_j}\right\|_1$$

$$= \sum_{j=1}^{n} |a_j| = \left\|\sum_{j=1}^{n} a_j\delta_{\psi_j}\right\|_1$$

On montre comme dans 4.1.1 que ζ_χ peut être étendu en un automorphisme unique de $\overline{\Delta(\mathrm{H}, \sigma)}$ que nous continuerons à noter ζ_χ.

4.4.2. *L'application* $\zeta : \chi \in \mathrm{H}' \to \zeta_\chi \in \alpha(\overline{\Delta(\mathrm{H}, \sigma)})$ *est un monomorphisme.*

Supposons que $\zeta_\chi = \zeta_{\chi'}$. Alors, pour tout $\psi \in \mathrm{H}$ $e^{i\chi(\psi)}\delta_\psi = e^{i\chi'(\psi)}\delta_\psi$ ce qui implique $e^{i\chi(\psi)} = e^{i\chi'(\psi)}$ pour tout $\psi \in \mathrm{H}$. ([2], 6.1.1) montre enfin que $\chi = \chi'$. De plus, il est évident que $\zeta_{\chi+\chi'} = \zeta_\chi . \zeta_{\chi'}$ et que $\zeta_0 = \mathscr{I}$.
H′ peut être considéré comme un sous-groupe abélien de $\alpha(\overline{\Delta(\mathrm{H}, \sigma)})$.

Remarquons que si χ_φ est défini par $\chi_\varphi(\psi) = -2\sigma(\varphi, \psi)$ pour tout $\psi \in \mathrm{H}$, alors si $a \in \overline{\Delta(\mathrm{H}, \sigma)}$,

$$\zeta_{\chi_\varphi}(a) = \delta_\varphi . a . \delta_{-\varphi}$$

car

$$\delta_\varphi\delta_\psi\delta_{-\varphi} = e^{-2i\sigma(\varphi,\psi)}\delta_\psi.$$

ζ_{χ_φ} est donc un automorphisme interne. Ces automorphismes sont très importants car ils sont implémentables pour toutes les représentations de $\overline{\Delta(\mathrm{H}, \sigma)}$ (i. e. pour toute représentation, π de $\overline{\Delta(\mathrm{H}, \sigma)}$, il existe un opérateur unitaire U de l'espace de représentation tel que $\pi(\zeta_{\chi_\varphi}(a)) = \mathrm{U}\pi(a)\mathrm{U}^{-1}$ pour tout $a \in \overline{\Delta(\mathrm{H}, \sigma)}$).

4.4.3. *Pour toute structure préhilbertienne σ-permise et pour tout $\chi \in \mathrm{H}^*$ (H^* étant l'ensemble des éléments continus de H'), ζ_χ est implémentable pour toutes les représentations π telles que $\psi \to \pi(\delta_\psi)$ soit fortement (ou faiblement) continu.*

Montrons tout d'abord que π peut être étendu en une représentation π' de $\Delta(\overline{\mathrm{H}}, \sigma)$ ($\overline{\mathrm{H}}$ étant l'espace de Hilbert complété de H) telle que

$$\psi \in \overline{\mathrm{H}} \to \pi'(\delta_\psi)$$

soit fortement (ou faiblement) continu. Soit $\mathscr{H}$ l'espace de représentation de π. Pour tout $\xi \in \mathrm{H}$, l'application $\psi \in \mathrm{H} \to \pi(\delta_\psi)\xi$ est uniformément continue par hypothèse.
D'après ([7], 3.15.6), elle peut-être étendue à $\overline{\mathrm{H}}$. Pour tout $\psi \in \overline{\mathrm{H}}$ et $\xi \in \mathscr{H}$, notons $\pi'(\delta_\psi)\xi$ le vecteur $\lim\limits_{\varphi \to \psi} \pi(\delta_\varphi)\xi$.

$\pi'(\delta_\psi)$ est donc un opérateur unitaire de $\mathscr{H}$. π' peut être considéré comme une application linéaire sur $\Delta(\overline{\mathrm{H}}, \sigma)$ en posant,

$$\pi'\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{\psi_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pi'(\delta_{\psi_i})$$

pour tout

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{\psi_i} \in \Delta(\overline{\mathrm{H}}, \sigma).$$

π' est une représentation car pour tout ψ, $\varphi \in \overline{\mathrm{H}}$,

$$\pi'(\delta_\psi \delta_\varphi) = \pi'(\delta_\psi)\pi'(\delta_\varphi)$$

et

$$\pi'(\delta_\psi)^* = \pi'(\delta_{-\psi})$$

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ et $\xi \in \mathscr{H}$,

$$\begin{aligned} &\| \pi'(\delta_\psi \delta_\varphi)\xi - \pi'(\delta_\psi)\pi'(\delta_\varphi)\xi \| \\ &\leqslant \| e^{-i\sigma(\psi,\varphi)}\pi'(\delta_{\psi+\varphi})\xi - e^{-i\sigma(\psi',\varphi')}\pi(\delta_{\psi'+\varphi'})\xi \| \\ &+ \| \pi(\delta_{\varphi'})\xi - \pi'(\delta_\varphi)\xi \| + \| \pi(\delta_{\psi'})\pi'(\delta_\varphi)\xi - \pi'(\delta_\psi)\pi'(\delta_\varphi)\xi \| \end{aligned}$$

où ψ' et $\varphi' \in \mathrm{H}$.

D'après l'hypothèse ψ' et φ' peuvent être choisis tels que

$$\| \pi'(\delta_\psi \delta_\varphi)\xi - \pi'(\delta_\psi)\pi'(\delta_\varphi)\xi \| \leqslant \varepsilon$$

Comme ξ et ε sont arbitraires nous avons

$$\pi'(\delta_\psi \delta_\varphi) = \pi'(\delta_\psi)\pi'(\delta_\varphi)$$

Cette égalité implique

$$\pi'(\delta_\psi)^{-1} = \pi'(\delta_{-\psi})$$

donc

$$\pi'(\delta_\psi)^* = \pi'(\delta_{-\psi})$$

puisque $\pi'(\delta_\psi)$ est unitaire.

3.1.2 indique que π' admet une extension unique π'' à $\Delta(\overline{\mathrm{H}}, \sigma)$.

Supposons maintenant que $\chi \in \mathrm{H}^*$. D'après le théorème de Riesz (voir ([7], 6.3.2)) il existe un vecteur $\psi \in \overline{\mathrm{H}}$ tel que $\chi(\varphi) = -2\sigma(\psi, \varphi)$ pour tout $\varphi \in \overline{\mathrm{H}}$. Donc d'après ce que nous avons vu plus haut,

$$\zeta_\chi(a) = \delta_\psi . a . \delta_{-\psi}$$

pour tout $a \in \overline{\Delta(\overline{\mathrm{H}}, \sigma)}$. La démonstration s'achève en remarquant que si $a \in \overline{\Delta(\mathrm{H}, \sigma)}$, alors $\pi(\zeta_\chi(a)) = \pi'(\delta_u)\pi(a)\pi'(\delta_u)^*$. La réciproque de 4.4.3 est

4.4.4. *Pour toute structure préhilbertienne σ-permise et pour tout $\chi \in \mathrm{H}'$ vérifiant : ζ_χ est implémentable pour une représentation π telle que $\psi \to \pi(\delta_\psi)$ soit fortement (ou faiblement) continue, alors $\chi \in \mathrm{H}^*$.*

Par hypothèse $e^{i\chi(\psi)}\pi(\delta_\psi) = \mathrm{U}\pi(\delta_\psi)\mathrm{U}^*$ où U est un opérateur unitaire de l'espace de représentation $\mathscr{H}$. Si $\xi \in \mathscr{H}$ et $\| \xi \| = 1$ alors,

$$e^{i\chi(\psi)} = (\mathrm{U}^*\pi(\delta_\psi)\xi \mid \pi(\delta_\psi)\mathrm{U}^*\xi)$$

fonction continue en ψ par hypothèse ([2], 6.1.2) implique $\chi \in \mathrm{H}^*$.

REMERCIEMENTS

Durant ce travail, j'ai bénéficié de fructueuses discussions avec MM. les Professeurs D. Kastler et A. Guichardet. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma gratitude.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. KASTLER, The C*-algebras of a free boson field. I. Discussion of Basic Facts. *Commun. Math. Phys.*, **1**, 1965, 14-18.

[2] J. MANUCEAU, Étude de quelques automorphismes de la C*-algèbre du champ de bosons libres. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **8**, 1968, 117-138.

[3] J. DIXMIER, *Les C*-algèbres et leurs représentations*. Gauthier-Villars, 1964, Paris.

[4] H. ARAKI, Hamiltonian Formalism and the Canonical Commutation Relations in Quantum Field Theory. *J. Math. Phys.*, **1**, 1960, 492.

[5] Z. TAKEDA, Inductive limit and infinite direct product of operator algebras. *Tôhoku Math. J.*, **7**, 1955, 67-86.

[6] M. A. NAIMARK, *Normed Rings*. Noordhoff-Groningen, 1959, The Netherlands.

[7] J. DIEUDONNÉ, *Fondements de l'analyse moderne*. Gauthier-Villars, 1963, Paris.

[8] M. H. STONE, On one-parameter unitary groups in Hilbert space. *Annals of Mathematics* (2), **33**, 1932, 643-648.

[9] G. F. DELL'ANTONIO, S. DOPLICHER and D. RUELLE, A theorem on canonical commutation and anticommutation relations. *Commun. Math. Phys.*, **2**, 1966, 223-230.

[10] D. KASTLER, *Introduction à l'électrodynamique quantique*. Dunod, 1961, Paris.

[11] J. Von NEUMANN, Die Eindentigkeit der Schrödingerschen Operators. *Math. Ann.*, **104**, 1931, 570.

Manuscrit reçu le 18 septembre 1967.