TROISIEME CYCLE
D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

THESE DE TROISIEME CYCLE

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES DE MARSEILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN PHYSIQUE THEORIQUE

par

Jérôme MANUCEAU
licencié ès Sciences

ETUDE DE QUELQUES AUTOMORPHISMES DE $\overline{M_1(H,\sigma)}$

soutenue le 7 Juillet 1966

JURY MM. D. KASTLER .... Président
J. MANDELBROJT..... Examinateur
G. LOUPIAS......... "

UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE

FACULTÉ DES SCIENCES DE MARSEILLE

PHYSIQUE THÉORIQUE

SOMMAIRE

ETUDE DE QUELQUES AUTOMORPHISMES DE $\overline{M_1(H,\sigma)}$

Résumé : H étant un espace vectoriel réel, σ une forme symplectique sur H , j'appellerai opérateur symplectique (resp. antisymplectique) tout élément de $\mathcal{L}(H, H)$ vérifiant $\sigma(T\psi, T\varphi) = \sigma(\psi, \varphi)$ (resp. $\sigma(T\psi, T\varphi) = -\sigma(\psi, \varphi)$) pour tout $\psi, \varphi \in H$. Je montre que ces opérateurs induisent sur $\overline{M_1(H, \sigma)}$ des automorphismes (resp. antiautomorphismes) qui sont une généralisation des automorphismes induits par le groupe de Lorentz $\mathcal{L}^{\uparrow}$ (resp. $\mathcal{L}^{\downarrow}$). Pour toute représentation de Fock, je donne un critère d'implémentation de ces automorphismes (resp. antiautomorphismes) induits. J'étudie en outre la C*-algèbre des bosons scalaires chargés et l'opérateur de conjugaison de charge qui est un opérateur symplectique particulier. Enfin je définis les automorphismes de jauge, généralisation de la transformation de jauge habituelle et je donne à nouveau un critère d'implémentation de ces automorphismes pour une représentation de Fock quelconque.

1 - COMPLEMENTS SUR $\overline{M_1(\mathcal{H},\sigma)}$

1.1. Définition de δ_ψ

D'après ([1], théorème 21) nous savons que $\overline{M_1(\mathcal{H},\sigma)}$ et $\mathcal{M}_1(\mathcal{H},\sigma)$ ne dépendent pas du système $\mathcal{G}$. Nous choisirons donc comme système $\mathcal{G}$, l'ensemble de tous les sous espaces vectoriels réguliers de $\mathcal{H}$, de dimension finie.

1.1.1. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } \psi \in \mathcal{H} \text{ et pour tout } E_\alpha, E_\beta \in \mathcal{G} \text{ tels que} \\ \psi \in E_\alpha \cap E_\beta \ , \quad (\delta_\psi, E_\alpha) \sim (\delta_\psi, E_\beta) . \end{array} \right.$

Soit E_γ un élément de $\mathcal{G}$ vérifiant $E_\alpha \cup E_\beta \subset E_\gamma$. Il est clair que $\varphi_{E_\gamma, E_\alpha}\delta_\psi = \varphi_{E_\gamma, E_\beta}\delta_\psi$. Ceci nous permet de noter la classe $\widehat{(\delta_\psi, E_\alpha)}$ par δ_ψ .

1.1.2. ($\delta_0 = \widehat{(\delta_0, \{0\})}$ est l'élément neutre de $\overline{M_1(\mathcal{H},\sigma)}$.

A cause de la continuité de la convolution gauche il suffit de vérifier que pour tout $\mu = \widehat{(\mu_\alpha, E_\alpha)} \in \mathcal{M}_1(\mathcal{H},\sigma)$, $\delta_0 \times \mu = \mu \times \delta_0 = \mu$. Mais ceci est évident, puisque $\varphi_{E_\alpha,\{0\}}\delta_0 = \delta_0$, le second membre étant considéré comme élément de $\mathcal{C}_0(E_\alpha)$.

1.2. Etude de la forme positive ω_s

Une structure préhilbertienne σ-permise sur $(\mathcal{H}, \sigma)$ est définie par un opérateur linéaire J de $\mathcal{H}$ à condition que $J^2 = -1$, que $\sigma(J\psi, J\varphi) = \sigma(\psi, \varphi)$ pour tout $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$ et que la forme symétrique bilinéaire $s(\psi,\varphi) = -\sigma(J\psi, \varphi)$ soit positive définie.

1.2.1 (Pour toute structure préhilbertienne σ-permise, ω_s est un état.

Cette proposition se déduit immédiatement de ([3], 1.3.6, 2.1.1, 2.1.4.) et de $\omega(\delta_0)=1$.

1.2.2 (Pour toute structure préhilbertienne σ-permise, ω_s est une forme pure.

Supposons que f soit une forme positive sur $\overline{M_1(H,\sigma)}$ majorée par ω, c'est-à-dire, que pour tout $\mu\in\overline{M_1(H,\sigma)}$, $f(\mu^*\times\mu)\leqslant\omega(\mu^*\times\mu)$. Nous allons montrer qu'il existe λ, tel que $f=\lambda\omega$, avec $0\leqslant\lambda\leqslant1$. Soient E_α et $E_\beta\in\mathfrak{S}$ tels que $E_\alpha\subset E_\beta$; ceci implique que $\overline{M_1(E_\alpha,\sigma)}\subset\overline{M_1(E_\beta,\sigma)}$. Pour tout $\mu_\alpha\in M_1(E_\alpha,\sigma)$, $f(\widehat{(\mu_\alpha,E_\alpha)}^*\times\widehat{(\mu_\alpha,E_\alpha)})\leqslant\omega(\widehat{(\mu_\alpha,E_\alpha)}^*\times\widehat{(\mu_\alpha,E_\alpha)})=\omega_\alpha(\mu_\alpha^*\times\mu_\alpha)$ où $\widehat{(\mu_\alpha,E_\alpha)}\in\mathfrak{M}_1(H,\sigma)$, $\omega_\alpha(\mu_\alpha)=\mu_\alpha(\Omega'_s\mid E_\alpha)$ et $\Omega'_s(\psi)=e^{-\frac{1}{2}s(\psi,\psi)}$. L'application $f_\alpha:\mu_\alpha\longrightarrow f(\widehat{(\mu_\alpha,E_\alpha)})$ est une forme positive continue de $M_1(E_\alpha,\sigma)$, qui peut être étendue à $\overline{M_1(E_\alpha,\sigma)}$, majorée par ω_α. D'après ([1], théorème 16), ω_α est un état pur ce qui implique qu'il existe un nombre réel λ_α tel que $f_\alpha=\lambda_\alpha\omega_\alpha$ où $0\leqslant\lambda_\alpha\leqslant1$. De même on montre que $f_\beta=\lambda_\beta\,\omega_\beta$ où $0\leqslant\lambda_\beta\leqslant1$. Pour un $\mu_\alpha\in M_1(E_\alpha,\sigma)$ tel que $\omega_\alpha(\mu_\alpha)\neq0$ (on pourrait prendre δ_0 par exemple), nous avons:

$$f_\beta(\varphi_{E_\beta,E_\alpha}\mu_\alpha)=f\left(\widehat{(\varphi_{E_\beta,E_\alpha}\mu_\alpha,E_\beta)}\right)=f\left(\widehat{(\mu_\alpha,E_\alpha)}\right)=f_\alpha(\mu_\alpha)$$

car $(\varphi_{E_\beta,E_\alpha}\mu_\alpha,E_\beta)\sim(\mu_\alpha,E_\alpha)$. D'où nous tirons $\lambda_\beta\omega_\beta(\varphi_{E_\beta,E_\alpha}\mu_\alpha)=\lambda_\alpha\,\omega_\alpha(\mu_\alpha)$. Comme $\omega_\beta(\varphi_{E_\beta,E_\alpha}\mu_\alpha)=\omega_\alpha(\mu_\alpha)$ (voir [1], § 5) nous avons $\lambda_\beta=\lambda_\alpha$. Soient maintenant E_α et E_β deux éléments quelconques de $\mathfrak{S}$. Nous savons qu'il existe $E_\gamma\in\mathfrak{S}$

tel que $E_\alpha \cup E_\beta \subset E_\gamma$. D'après ce qui précède, $\lambda_\alpha = \lambda_\gamma$ et $\lambda_\beta = \lambda_\gamma$. D'où $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = \lambda$ et $f = \lambda\omega$ sur $\mathfrak{M}_1(H,\sigma)$. Cette égalité est encore vraie sur $\overline{M_1(H,\sigma)}$ puisque que f et ω sont continues.

De ([3] ,2.5.4.) nous déduisons que la représentation de Fock correspondante π_s , est irréductible.

1.2.3. Supposons que J et J' soient deux opérateurs de H définissant deux structures préhilbertiennes σ-permises et que s et s' soient les parties réelles des formes hermitiennes correspondantes. Alors ,

$$\omega_s = \omega_{s'} \Longleftrightarrow \Omega'_s = \Omega'_{s'} \Longleftrightarrow s = s' \Longleftrightarrow J = J'.$$

$\omega_s = \omega_{s'} \Longrightarrow \Omega'_s = \Omega'_{s'}$ car pour tout $\widehat{(\mu_\alpha, E_\alpha)} \in \mathfrak{M}_1(H,\sigma)$, $\omega_s(\widehat{(\mu_\alpha, E_\alpha)}) = \omega_{s'}(\widehat{(\mu_\alpha, E_\alpha)})$ si et seulement si $\mu_\alpha(\Omega'_s|E_\alpha) = \mu_\alpha(\Omega'_{s'}|E_\alpha)$. Comme $M_1(E_\alpha,\sigma)$ sépare $\mathcal{C}_0(E_\alpha)$, nous avons $\Omega'_s|E_\alpha = \Omega'_{s'}|E_\alpha$. E_α étant quelconque dans $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}$ étant absorbant pour H, nous avons $\Omega'_s = \Omega'_{s'}$. La démonstration dans le sens inverse est évidente.

$\Omega'_s = \Omega'_{s'} \Longleftrightarrow s = s'$ est due au fait que l'exponentielle est une fonction injective et au fait que $s(\psi,\psi) = s'(\psi,\psi)$ pour tout $\psi \in H$ si et seulement si, $s = s'$. En effet, $s(\psi,\psi) = s'(\psi,\psi)$ pour tout $\psi \in H$, implique que pour tout $\psi, \varphi \in H$, $s(\psi+\varphi, \psi+\varphi) = s'(\psi+\varphi, \psi+\varphi)$ d'où nous tirons que $s(\psi,\varphi) = s'(\psi,\varphi)$.

$s = s' \Longleftrightarrow J = J'$ est due au fait que σ est régulière.

Notons par N_{ω_s} , l'idéal à gauche formé des $\mu \in \overline{M_1(H,\sigma)}$ tels que $\omega_s(\mu^* \times \mu) = 0$, et par $I_{\Omega'_s}$ l'espace vectoriel $\overline{M_1(H,\sigma)}/N_{\omega_s}$. Nous savons que ω_s par passage au quotient, définit sur $I_{\Omega'_s}$ une structure préhilbertienne. D'après ([3] ,2.8.5.) et 1.2.2., $I_{\mathcal{R}'_s}$ est un espace de Hilbert. Les éléments de $I_{\mathcal{R}'_s}$ seront notés $\hat{\mu}$ où $\mu \in \overline{M_1(\mathcal{H}, \sigma)}$.

1.2.4. $\left\{ \text{L'ensemble } \mathcal{A} = \{ \hat{\delta}_\psi \mid \psi \in \mathcal{H} \} \text{ est dense dans } I_{\mathcal{R}'_s} \right.$.

Il suffit de montrer que $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{M}_1(\mathcal{H},\sigma)/_{N_{\omega_s}}$, c'est-à-dire que le sous-espace de $\mathcal{M}_1(\mathcal{H},\sigma)/_{N_{\omega_s}}$ orthogonal à $\mathcal{A}$ se réduit à $\{0\}$:

Soient $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{H},\sigma)$, tel que $\omega(\hat{\delta}_\psi^* \times \hat{\mu}) = 0$, pour tout $\psi \in \mathcal{H}$, et (μ_α, E_α) un élément de μ tel que $\psi \in E_\alpha$. Nous avons,

$$\omega(\hat{\delta}_{-\psi} \times \hat{\mu}) = \omega(\delta_{-\psi} \times \mu) = \omega_\alpha(\delta_{-\psi} \times \mu_\alpha) = (\delta_{-\psi} \times \mu_\alpha)(\Omega' \mid E_\alpha) =$$
$$(\mu_\alpha \times (\check{\Omega}' \mid E_\alpha))(\psi) = 0 , \quad \forall \psi \in \mathcal{H} \Longrightarrow (\mu_\alpha^* \times \mu_\alpha \times (\check{\Omega}' \mid E_\alpha))(0) =$$
$$(\mu_\alpha^* \times \mu_\alpha)(\Omega' \mid E_\alpha) = \omega_\alpha(\mu_\alpha^* \times \mu_\alpha) = \omega(\mu^* \times \mu) = 0 \Longrightarrow$$

$\mu \in N_{\omega_s}$, c'est-à-dire, $\hat{\mu} = 0$.

1.3. Etude de la norme de Schrödinger.

1.3.1. $\left\{ \forall \mu \in \overline{M_1(\mathcal{H},\sigma)},\ \|\mu\|^2 = \sup\limits_{\nu \in \overline{M_1(\mathcal{H},\sigma)}} \dfrac{\omega(\nu^* \times \mu^* \times \mu \times \nu)}{\omega(\nu^* \times \nu)} = \|\pi(\mu)\|^2 \right.$.

Il est évident que $\|\pi(\mu)\|^2 = \sup\limits_{\nu \in \overline{M_1(\mathcal{H},\sigma)}} \dfrac{\|\pi(\mu)\hat{\nu}\|^2}{\|\hat{\nu}\|^2} =$

$\sup\limits_{\nu \in \overline{M_1(\mathcal{H},\sigma)}} \dfrac{\omega(\nu^* \times \mu^* \times \mu \times \nu)}{\omega(\nu^* \times \nu)} = \sup\limits_{\nu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{H},\sigma)} \dfrac{\omega(\nu^* \times \mu^* \times \mu \times \nu)}{\omega(\nu^* \times \nu)}$. La proposition sera établie quand nous aurons montré que pour tout $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{H},\sigma)$,

$\|\mu\|^2 = \sup\limits_{\nu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{H},\sigma)} \dfrac{\omega(\nu^* \times \mu^* \times \mu \times \nu)}{\omega(\nu^* \times \nu)}$. Soit $(\mu_\alpha, E_\alpha) \in \mu$; alors

$$\|\mu_\alpha\|^2 = \|\mu\|^2 = \sup_{\nu_\alpha \in M_1(E_\alpha,\sigma)} \frac{\omega(\widehat{(\nu_\alpha, E_\alpha)}^* \times \mu^* \times \mu \times \widehat{(\nu_\alpha, E_\alpha)})}{\omega(\widehat{(\nu_\alpha, E_\alpha)}^* \times \widehat{(\nu_\alpha, E_\alpha)})} \leqslant \|\pi(\mu)\|^2 .$$

L'inégalité inverse est vraie, puisque pour tout $\nu \in \mathcal{M}_1(H,\sigma)$, et pour tout $(\nu_\beta, E_\beta) \in \nu$ tel que $E_\alpha \subset E_\beta$, nous avons ,

$$\frac{\omega\left(\widehat{(\nu_\beta,E_\beta)}^* \times \widehat{(\varphi_{E_\beta,E_\alpha}\mu_\alpha,E_\beta)}^* \times \widehat{(\varphi_{E_\beta,E_\alpha}\mu_\alpha,E_\beta)} \times \widehat{(\nu_\beta,E_\beta)}\right)}{\omega\left(\widehat{(\nu_\beta,E_\beta)}^* \times \widehat{(\nu_\beta,E_\beta)}\right)} = \frac{\omega_\beta\left(\nu_\beta^* \times (\varphi_{E_\beta,E_\alpha}\mu_\alpha)^* \times (\varphi_{E_\beta,E_\alpha}\mu_\alpha) \times \nu_\beta\right)}{\omega_\beta(\nu_\beta^* \times \nu_\beta)} \leq$$

$$\| \varphi_{E_\beta,E_\alpha}\mu_\alpha \|^2 = \|\mu_\alpha\|^2 .$$

1.3.2. (Pour toute structure préhilbertienne σ-permise, $\pi_s(\delta_\psi)$ est fortement continue en ψ .

Nous savons que pour tout $\mu \in \overline{M_1(H,\sigma)}$, il existe $\nu = \sum_{i=1}^{n} c_i \delta_{\psi_i}$ tel que $\|\hat\mu - \hat\nu\| < \varepsilon/4$; alors

$$\|[\pi(\delta_\psi) - \pi(\delta_0)]\hat\mu\| = \|[e^{i\sigma(\psi_0,\psi)}\pi(\delta_{\psi-\psi_0}) - \pi(\delta_0)]\hat\mu\| \leq \|[\pi(\delta_{\psi-\psi_0}) - \pi(\delta_0)]\hat\mu\| + |1 - e^{i\sigma(\psi_0,\psi)}|.\|\hat\mu\| \leq 2\|\hat\mu - \hat\nu\| + \|[\pi(\delta_{\psi-\psi_0}) - \pi(\delta_0)]\hat\nu\| + |1 - e^{i\sigma(\psi_0,\psi)}|\,\|\hat\mu\| .$$

D'une part, σ étant continue en ψ il existe un voisinage V_1 de ψ_0, tel que $\psi \in V_1 \Rightarrow |1 - e^{i\sigma(\psi_0,\psi)}| \leq \varepsilon/4\|\hat\mu\|$. D'autre part, en posant $\psi' = \psi - \psi_0$, $\|[\pi(\delta_{\psi'}) - \pi(\delta_0)]\hat\nu\| = \omega(\nu^* \times [\delta_{\psi'} - \delta_0] \times [\delta_{\psi'} - \delta_0] \times \nu) \leq 2|\omega(\nu^* \times \nu) - \omega(\nu^* \times \delta_{\psi'} \times \nu)|$. Comme $\omega(\nu^* \times \delta_{\psi'} \times \nu) = \sum_{i,j=1}^{n} c_i \bar c_j \omega(\delta_{-\psi_j} \times \delta_{\psi'} \times \delta_{\psi_i})$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} c_i \bar c_j\, e^{i\sigma(\psi_j,\psi_i)} e^{i\sigma(\psi_i+\psi_j,\psi')}\, \Omega'(\psi' - \psi_j + \psi_i)$$

est bien continue en ψ', il existe un voisinage V_2 de ψ_0 , tel que $\psi \in V_2 \Rightarrow \|[\pi(\delta_\psi) - \pi(\delta_0)]\hat\nu\| \leq \varepsilon/4$. D'où, $\psi \in V_1 \cap V_2$ implique $\|[\pi(\delta_\psi) - \pi(\delta_0)]\hat\mu\| \leq \varepsilon$.

<u>Remarque</u> : cette proposition implique que $\pi(\delta_\psi)$ est faiblement continue en ψ , c'est-à-dire, que pour tout μ et $\nu \in \overline{M_1(H,\sigma)}$, $\omega(\nu^* \times \delta_\psi \times \mu) = (\hat\nu | \pi(\delta_\psi)\hat\mu)$ est continue en ψ .

1.3.3. Pour toute structure préhilbertienne σ-permise de $(\mathcal{H},\sigma)$ et pour tout $\psi \in \overline{\mathcal{H}}-\mathcal{H}$,

$$\pi(\delta_\psi) \in \overline{\pi(\mathcal{M}_1(\mathcal{H},\sigma))}^{s} = \pi(\mathcal{M}_1(\mathcal{H},\sigma))'' \subset \mathcal{L}(I_\alpha) .$$

Les lettres s et w indiquent que la fermeture considérée est la fermeture forte ou faible. Cette proposition est une conséquence immédiate de 1.3.2.

1.3.4. $\overline{M_1(\mathcal{H},\sigma)}$ est la C^*-algèbre enveloppante de $M_1(\mathcal{H},\sigma)$.

Cette proposition se déduit d'une proposition plus générale :

1.3.5. Soit $\mathfrak{A}$ un algèbre de Banach involutive admettant une représentation injective $\pi_\circ$, la C^*-algèbre enveloppante de $\mathfrak{A}$ est la C^*-algèbre $\overline{\mathfrak{A}}$ complétée de $\mathfrak{A}$, pour la norme $\|x\|_\circ = \|\pi_\circ(x)\|$.

Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des représentations de $\mathfrak{A}$. Comme $\mathfrak{A}$ admet une représentation injective , $\|x\|' = \sup_{\pi \in \mathcal{R}} \|\pi(x)\|$ est une norme. Nous savons que la complétion $\overline{\mathfrak{A}}$ de $\mathfrak{A}$ pour cette norme est la C^*-algèbre enveloppante de $\mathfrak{A}$. La proposition sera établie quand nous aurons montré que $\|x\|' = \|x\|_\circ$. Ceci est vrai car $\|x\|_\circ \leq \|x\|'$, donc $\pi_\circ$ peut s'étendre à $\overline{\mathfrak{A}}$; $\pi_\circ$ étant injective $\|\pi_\circ(x)\| = \|x\|_\circ = \|x\|'$.

2 - AUTOMORPHISMES D'UNE C^*-ALGEBRE ET REPRESENTATIONS

Soient $\mathfrak{A}$ une C^*-algèbre et $\mathrm{aut}(\mathfrak{A})$ l'ensemble des automorphismes de $\mathfrak{A}$. Pour tout $T \in \mathrm{aut}(\mathfrak{A})$ et pour tout $x \in \mathfrak{A}$, nous écrirons x^T et $x^{T^{-1}}$ au lieu de $T(x)$ et $T^{-1}(x)$. Il est clair que $(x^T)^{T^{-1}} = (x^{T^{-1}})^T = x$ et que $\|x^T\| = \|x^{T^{-1}}\| = \|x\|$.

2.1. Formes positives.

Soit f une forme positive de $\mathfrak{A}$. Pour tout $T \in \mathrm{aut}(\mathfrak{A})$, posons $f^T(x) = f(x^T)$ pour tout $x \in \mathfrak{A}$. La proposition suivante est immédiate :

2.1.1. Pour tout $T \in \mathrm{aut}(\mathfrak{A})$, f est une forme positive $\Longleftrightarrow$ f^T est une forme positive. De plus $\|f\| = \|f^T\|$.

Nous en déduisons que : f est un état $\Longleftrightarrow$ f^T est un état.

2.1.2. Pour tout $T \in \mathrm{aut}(\mathfrak{A})$, f est pure $\Longleftrightarrow$ f^T est pure.

Supposons que f soit pure et que f_1 soit une forme positive vérifiant $f_1(x^*x) \leqslant f^T(x^*x)$ pour tout $x \in \mathfrak{A}$; ceci implique que $f_1^{T^{-1}}(x^*x) \leqslant f(x^*x)$. Comme f est pure nous en déduisons, $f_1^{T^{-1}} = \lambda f$ avec $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. D'où $f_1 = \lambda f^T$ avec $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, ce qui prouve que f^T est pure. La réciproque se démontre de façon analogue.

2.2. Automorphismes implémentables pour une représentation.

Soit π une représentation de $\mathfrak{A}$ dans $\mathcal{H}$. Pour tout $\tau \in \mathrm{aut}(\mathfrak{A})$, nous écrirons $\pi^{\tau}(x) = \pi(x^{\tau})$ pour tout $x \in \mathfrak{A}$. Nous dirons que τ est implémentable pour π si et seulement si, π^{τ} est unitairement équivalent à π, (c'est-à-dire, il existe un opérateur unitaire $U(\tau) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que $\pi^{\tau}(x) = U(\tau)\pi(x)U(\tau)^{-1}$, pour tout $x \in \mathfrak{A}$). Notons par $\mathrm{aut}_{\pi}(\mathfrak{A})$, l'ensemble des automorphismes de $\mathfrak{A}$ implémentables pour π.

2.2.1. Soit π une représentation de $\mathfrak{A}$. Alors, $\mathrm{aut}_{\pi}(\mathfrak{A})$ est un sous-groupe de $\mathrm{aut}(\mathfrak{A})$. Si de plus π est irréductible, l'application $U : \tau \longrightarrow U(\tau)$ est une représentation projective de $\mathrm{aut}_{\pi}(\mathfrak{A})$, définie à une équivalence près.

Pour tout $\tau, \tau' \in \mathrm{aut}_{\pi}(\mathfrak{A})$ et pour tout $x \in \mathfrak{A}$, $\pi^{\tau\tau'}(x) = \pi^{\tau}(x^{\tau'}) = U(\tau)\pi(x^{\tau'})U(\tau)^{-1} = U(\tau)U(\tau')\pi(x)U(\tau')^{-1}U(\tau)^{-1}$, ce qui implique que $\tau\tau' \in \mathrm{aut}_{\pi}(\mathfrak{A})$. De toute évidence $1 \in \mathrm{aut}_{\pi}(\mathfrak{A})$. Enfin, pour tout $\tau \in \mathrm{aut}_{\pi}(\mathfrak{A})$, $\pi^{\tau}(x) = U(\tau)\pi(x)U(\tau)^{-1}$, et, en remplaçant x par $x^{\tau^{-1}}$, nous obtenons $\pi^{\tau^{-1}}(x) = U(\tau)^{-1}\pi(x)U(\tau)$. Donc $\tau^{-1} \in \mathrm{aut}(\mathfrak{A})$. Supposons maintenant que π soit irréductible. La relation $\pi^{\tau\tau'}(x) = U(\tau\tau')\pi(x)U(\tau\tau')^{-1} = U(\tau)U(\tau')\pi(x)U(\tau')^{-1}U(\tau)^{-1}$ montre que $U(\tau')^{-1}U(\tau)^{-1}U(\tau\tau')$ commute avec $\pi(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{A}$. ([3], 2.8.4 et 2.3.1) nous indiquent que

$U(\tau\tau') = f(\tau, \tau')U(\tau)U(\tau')$ où f est un multiplicateur (voir [4], appendice). Il est clair que U est une représentation projective, définie à une équivalence près.

La proposition suivante est immédiate.

2.2.2. Pour tout $T \in aut(\mathfrak{A})$ et pour toute représentation π de $\mathfrak{A}$ π est cyclique, si et seulement si, π^T est cyclique. Alors π et π^T admettent le même vecteur cyclique. En outre π est irréductible, si et seulement si, π^T est irréductible.

2.3. Formes positives et représentations

Soient π une représentation de $\mathfrak{A}$ dans $\mathcal{H}$, ξ un élément de $\mathcal{H}$ et T un élément de $aut(\mathfrak{A})$. f est la forme associée à π et ξ, si et seulement si, f^T est la forme associée à π^T et ξ. En effet

$$f(x) = (\xi | \pi(x)\xi) \iff f^T(x) = (\xi | \pi^T(x)\xi)$$

2.3.1. Soient π une représentation cyclique admettant ξ pour vecteur cyclique et f la forme associée à π et ξ. Si $T \in aut(\mathfrak{A})$ est tel que $f = f^T$ alors, $T \in aut_\pi(\mathfrak{A})$ et $U(T)\xi = \xi$.

En utilisant 2.2.2., on voit que cette proposition est un cas particulier ([3], 2.4.1.).

2.3.2. Si f est un état pur et π la représentation définie par f (voir [3], 2.4.5.), alors, $T \in aut_\pi(\mathfrak{A})$ si et seulement si, il existe un élément unitaire u de $\tilde{\mathfrak{A}}$ ($\tilde{\mathfrak{A}}$ étant la C^*-algèbre déduite de $\mathfrak{A}$ par adjonction d'un élément unité), tel que $f^T(x) = f(u^* x u)$, pour tout $x \in \mathfrak{A}$.

En utilisant 2.1.1. et 2.1.2., on voit que cette proposition est un cas particulier de ([3] , 2.8.6.).

2.3.1. et 2.3.2. nous permettent de voir sur les formes associées, si un automorphisme est implémentable pour une représentation donnée. Nous les utiliserons dans la suite.

3 - AUTOMORPHISMES DE $\overline{M_1(\mathcal{H},\sigma)}$ INDUITS PAR LES OPERATEURS SYMPLECTIQUES DE $(\mathcal{H},\sigma)$.

3.1. Opérateurs symplectiques.

$\mathcal{H}$ étant un espace vectoriel réel, σ une forme symplectique, nous dirons d'un opérateur linéaire T de $\mathcal{H}$, qu'il est symplectique, si et seulement si, T est surjectif et $\sigma(T\psi, T\varphi) = \sigma(\psi,\varphi)$ pour tout $\psi,\varphi\in\mathcal{H}$. Notons par $S(\mathcal{H},\sigma)$ l'ensemble des opérateurs symplectiques de $(\mathcal{H},\sigma)$.

3.1.1. (Pour tout $T\in S(\mathcal{H},\sigma)$, T est régulier et $T^{-1}\in S(\mathcal{H},\sigma)$.

Si $\psi\in \ker T$, pour tout $\varphi\in\mathcal{H}$ nous avons $\sigma(T\psi,T\varphi)=\sigma(\psi,\varphi)=0$. D'où $\psi=0$. En outre, pour tout $\psi,\varphi\in\mathcal{H}$, $\sigma(T^{-1}\psi,T^{-1}\varphi)=\sigma(TT^{-1}\psi,TT^{-1}\varphi)=\sigma(\psi,\varphi)$.

3.1.2. (Soient E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$, T un élément de $S(\mathcal{H},\sigma)$. Alors, E est régulier si et seulement si TE est régulier.

Cette proposition est immédiate. Nous en déduisons que les les éléments de $S(\mathcal{H},\sigma)$ laissent $\mathfrak{G}$ invariant.

3.1.3. (Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, F un espace vectoriel normé. Alors, toutes les applications linéaires de E dans F sont continues.

Soient T une application linéaire de E dans F, $e_1,\dots,e_m$ une base de $\ker T$ que nous complétons par $e_{m+1},\dots,e_n$ pour avoir une base de F. Nous savons que $f_1=T(e_{m+1}),\ \dots,\ f_{n-m}=T(e_n)$, est une base de $\mathrm{val}\, T$, que la norme $\|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ est équivalente à la norme de E et que la norme $\|\sum_{i=1}^{n-m} y_i f_i\| = \sum_{i=1}^{n-m} |y_i|$ est équivalente à la norme de F restreinte à $\mathrm{val}\, T$. Cependant $\|T(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i)\| = \|\sum_{i=1}^{n-m} x_{m+i} f_i\| = \sum_{i=1}^{n-m} |x_{m+i}| \leqslant \|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\|$, ce qui prouve la continuité de T.

3.1.4. Soit E un sous espace vectoriel régulier de H, de dimension finie. L'application $f \longrightarrow f^T$ où $T \in S(H,\sigma)$ et $f^T(\Psi) = f(T\Psi)$ pour tout $\Psi \in E$, est un isomorphisme de $\mathcal{C}_0(E)$ sur $\mathcal{C}_0(T^{-1}E)$ et de $\mathcal{L}_2(E)$ sur $\mathcal{L}_2(T^{-1}E)$.

Comme E et $T^{-1}E$ sont de dimension finie, nous avons le droit de parler de $\mathcal{C}_0(E)$ et de $\mathcal{C}_0(T^{-1}E)$ sans préciser quelle est la structure préhilbertienne, σ-permise que nous prenons sur (H,σ) car toutes les normes sur E et $T^{-1}E$ sont équivalentes. Supposons que $f \in \mathcal{C}_0(E)$; ceci implique que $f^T = f \circ T$ est continue puisque c'est la composition de deux fonctions continues. En outre, $\Psi \in \mathrm{déf}\, f^T$ si et seulement si, $T\Psi \in E$. D'où $\mathrm{déf}\, f^T = T^{-1}E$. Comme f s'annule à l'infini, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $Q \subset E$ tel que $\Psi \notin Q$ implique $|f(\Psi)| < \varepsilon$. Donc pour tout $\Psi \notin T^{-1}Q$ (qui est compact puisque T^{-1} est continue), $|f^T(\Psi)| < \varepsilon$. Ceci nous montre que $f^T \in \mathcal{C}_0(T^{-1}E)$. Les propriétés $(\alpha f + \beta g)^T = \alpha f^T + \beta g^T$ et $(fg)^T = f^T g^T$, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et pour tout $f, g \in \mathcal{C}_0(E)$ sont évidentes. Nous avons encore $\|f\| = \|f^T\|$ car $\sup_{\Psi \in E} |f(\Psi)| = \sup_{\Psi \in T^{-1}\Psi} |f(T\Psi)|$ et $(f^*)^T = (f^T)^*$ car $(f^*)^T(\Psi) = \overline{f(-T\Psi)} = \overline{f^T(-\Psi)} = (f^T)^*(\Psi)$. L'application $f \longrightarrow f^T$ est une bijection car elle admet pour fonction inverse, l'application $f \longrightarrow f^{T^{-1}}$. Enfin T étant symplectique, $dm_\sigma(\Psi) = dm_\sigma(T\Psi) = dm_\sigma(T^{-1}\Psi)$,

d'où $\|f\|_2^2 = \int_E |f(\psi)|^2 \, d\, m_\sigma(\psi) = \int_E |f^T(T^{-1}\psi)|^2 \, d\, m_\sigma(\psi) = \int_{T^{-1}E} |f^T(\psi)|^2 \, d\, m_\sigma(\psi) =$
$\|f^T\|_2^2$.

3.1.5 L'application $\tau_T : \mu \longrightarrow \mu^T$ où $T \in S(\mathcal{H},\sigma)$ et $\mu^T(f) = \mu(f^T)$ pour tout $f \in \mathcal{C}_0(E)$, est un isomorphisme de $M_1(E,\sigma)$ sur $M_1(TE,\sigma)$ qui peut être étendu en un isomorphisme de $\overline{M_1(E,\sigma)}$ sur $\overline{M_1(TE,\sigma)}$.

En utilisant 3.1.4. cette proposition est immédiate.

([3], 1.3.7. et 1.8.1.) impliquent,

3.1.6. $\|\mu^T\|_1 = \|\mu\|_1$ et $\|\pi_2(\mu^T)\| = \|\pi_2(\mu)\|$, pour tout $\mu \in M_1(E,\sigma)$ et $T \in S(\mathcal{H},\sigma)$. $\|\mu^T\| = \|\mu\|$ pour tout $\mu \in \overline{M_1(E,\sigma)}$ et $T \in S(\mathcal{H},\sigma)$.

3.1.7. $(\delta_\psi)^T = \delta_{T\psi}$ pour tout $\psi \in E$ et $T \in S(\mathcal{H},\sigma)$.

En effet $(\delta_\psi)^T(f) = \delta_\psi(f^T) = f^T(\psi) = f(T\psi) = \delta_{T\psi}(f)$ pour tout $f \in \mathcal{C}_0(TE)$.

3.2. Automorphismes de $\overline{M_1(\mathcal{H},\sigma)}$, induits par les éléments de $S(\mathcal{H},\sigma)$.

3.2.1. Soit T un élément quelconque de $S(\mathcal{H},\sigma)$; pour tout $E_\alpha, E_\beta \in \mathcal{G}$ tel que $E_\alpha \subset E_\beta$ et pour tout $\mu_\alpha \in M_1(E_\alpha,\sigma)$ nous avons, $(\varphi_{E_\beta,E_\alpha}\mu_\alpha)^T = \varphi_{TE_\beta,TE_\alpha}\mu_\alpha^T$.

Pour tout $f^{T^{-1}} \in \mathcal{C}_0(TE_\beta)$, $(\varphi_{E_\beta,E_\alpha}\mu_\alpha)^T(f^{T^{-1}}) = \mu_\alpha(f|E_\alpha)$, $(\varphi_{TE_\beta,TE_\alpha}\mu_\alpha^T)(f^{T^{-1}}) = \mu_\alpha^T(f^{T^{-1}}|TE_\alpha)$ et la proposition se déduit du fait que $(f^{T^{-1}}|TE_\alpha)^T = f|E_\alpha$; en effet, pour tout $\psi \in E_\alpha$, $(f^{T^{-1}}|TE_\alpha)^T(\psi) = f^{T^{-1}}(T\psi) = f(\psi)$.

3.2.2. $\left\{\begin{array}{l}\text{Soit } T \text{ un élément quelconque de } S(\mathcal{H},\sigma) \text{. Alors,}\\ (\mu_\alpha, E_\alpha) \sim (\mu_\beta, E_\beta) \text{ si et seulement si } (\mu_\alpha^T, TE_\alpha) \sim (\mu_\beta^T, TE_\beta).\end{array}\right.$

$(\mu_\alpha, E_\alpha) \sim (\mu_\beta, E_\beta)$ si et seulement si, il existe $E_\gamma \in \mathcal{G}$ tel que $E_\alpha \cup E_\beta \subset E_\gamma$ et $\varphi_{E_\gamma, E_\alpha}\mu_\alpha = \varphi_{E_\gamma, E_\beta}\mu_\beta$. D'après 3.2.1., cette égalité est vraie, si et seulement si, $\varphi_{TE_\gamma, TE_\alpha}\mu_\alpha^T = \varphi_{TE_\gamma, TE_\beta}\mu_\beta^T$, c'est-à-dire, si et seulement si $(\mu_\alpha^T, TE_\alpha) \sim (\mu_\beta^T, TE_\beta)$.

Cette dernière proposition donne un sens à la définition suivante : pour tout $\widehat{(\mu_\alpha, E_\alpha)} \in \mathcal{M}_1(\mathcal{H},\sigma)$ et $T \in S(\mathcal{H},\sigma)$, $\widehat{(\mu_\alpha, E_\alpha)}^T = \widehat{(\mu_\alpha^T, TE_\alpha)}$. ([1], 83) et 3.1.6. nous montrent que pour tout $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{H},\sigma)$ et $T \in S(\mathcal{H},\sigma)$, $\|\mu^T\| = \|\mu\|$ et $\|\mu^T\|_1 = \|\mu\|$. Nous avons donc un automorphisme de $\mathcal{M}_1(\mathcal{H},\sigma)$ qui peut être étendu à $M_1(\mathcal{H},\sigma)$ et $\overline{M_1(\mathcal{H},\sigma)}$.

3.2.3. $\left\{\begin{array}{l}\text{L'application } \tau : S(\mathcal{H},\sigma) \longrightarrow \operatorname{aut}\left(\overline{M_1(\mathcal{H},\sigma)}\right)\\ \qquad\qquad\qquad\quad T \longrightarrow \tau_T \text{, est un monomorphisme.}\end{array}\right.$

Vérifions sur $\mathcal{M}_1(\mathcal{H},\sigma)$, que $\tau_{TT'} = \tau_T \cdot \tau_{T'}$. Par continuité cette égalité s'étendra à $\overline{M_1(\mathcal{H},\sigma)}$. Pour tout $\widehat{(\mu_\alpha, E_\alpha)} \in \mathcal{M}_1(\mathcal{H},\sigma)$, $\widehat{(\mu_\alpha, E_\alpha)}^{TT'} = \widehat{(\mu_\alpha^{TT'}, TT'E_\alpha)}$ et $\left(\widehat{(\mu_\alpha, E_\alpha)}^{T'}\right)^T = \widehat{(\mu_\alpha^{T'}, T'E_\alpha)}^T = \widehat{((\mu_\alpha^{T'})^T, TT'E_\alpha)}$. Or pour tout $f \in \mathcal{C}_0(TT'E_\alpha)$, $(f^T)^{T'} = f^{T'T}$; d'où $\mu_\alpha^{TT'} = (\mu_\alpha^{T'})^T$, ce qui prouve que $\tau_{TT'} = \tau_T \cdot \tau_{T'}$. Montrons que τ est injectif : supposons que $\tau_T = \tau_{T'}$, ce qui implique que pour tout $\widehat{(\mu_\alpha, E_\alpha)} \in \mathcal{M}_1(\mathcal{H},\sigma)$, $(\mu_\alpha^T, TE_\alpha) \sim (\mu_\alpha^{T'}, T'E_\alpha)$. Ainsi, pour tout $E_\gamma \in \mathcal{G}$ et vérifiant $TE_\alpha \cup T'E_\alpha \subset E_\gamma$, pour tout $f \in \mathcal{C}_0(E_\gamma)$ nous avons, $\mu_\alpha^T(f|TE_\alpha) = \mu_\alpha^{T'}(f|T'E_\alpha)$; d'où $\mu_\alpha(f^T|E_\alpha) = \mu_\alpha(f^{T'}|E_\alpha)$, pour tout $\mu_\alpha \in M_1(E_\alpha,\sigma)$. Comme $M_1(E_\alpha,\sigma)$ sépare $\mathcal{C}_0(E_\alpha)$, nous avons : pour tout $\psi \in E_\alpha$, $f(T\psi) = f(T'\psi)$. Cette égalité étant vraie pour tout $f \in \mathcal{C}_0(E_\gamma)$, et $\mathcal{C}_0(E_\gamma)$ séparant

E_γ, $T\psi = T'\psi$ pour tout $\psi \in E_\alpha$. Or E_α est un élément quelconque de $\mathcal{G}$, lequel est un système absorbant pour $\mathcal{H}$. Donc $T = T'$.

Nous pouvons donc considérer $S(\mathcal{H},\sigma)$, comme un sous groupe de $aut(\overline{M_1(\mathcal{H},\sigma)})$; c'est ce nous ferons dans la suite.

3.3. Etude de $aut_\pi(\overline{M_1(\mathcal{H},\sigma)})$.

Supposons que J soit un opérateur de $\mathcal{H}$, définissant une structure préhilbertienne σ-permise. Soit s la partie réelle de la forme hermitienne correspondante. Pour tout $T \in S(\mathcal{H},\sigma)$, $J^T = T^{-1}JT$ définit une structure préhilbertienne σ-permise, et la partie réelle de la forme hermitienne correspondante est $s^T(\psi,\varphi) = -\sigma(J^T\psi,\varphi) = s(T\psi,T\varphi)$. Soit π_s la représentation attachée à ω_s. D'après 2.3., π_s^T est la représentation attachée à ω_s^T.

3.3.1 $\quad$ ($\omega_s^T = \omega_{s^T}$.

Nous allons le montrer sur $\mathcal{M}_1(\mathcal{H},\sigma)$. Pour tout $\widehat{(\mu_\alpha,E_\alpha)} \in \mathcal{M}_1(\mathcal{H},\sigma)$,

$$\omega_s^T(\widehat{(\mu_\alpha,E_\alpha)}) = \omega_s(\widehat{(\mu_\alpha,E_\alpha)}^T) = \omega_s(\widehat{(\mu_\alpha^T,TE_\alpha)}) = \mu_\alpha^T(\Omega'_s \mid TE_\alpha) =$$
$$\mu_\alpha(\Omega'^T_s \mid E_\alpha) = \mu_\alpha(\Omega'_{s^T} \mid E_\alpha) = \omega_{s^T}(\widehat{(\mu_\alpha,E_\alpha)}).$$

Notons par $S_\pi(\mathcal{H},\sigma) = S(\mathcal{H},\sigma) \cap aut_\pi(\overline{M_1(\mathcal{H},\sigma)})$. D'après 2.3.2. nous savons que $T \in S_\pi(\mathcal{H},\sigma)$, si et seulement si, il existe un unitaire u de $\overline{M_1(\mathcal{H},\sigma)}$ tel que pour tout $\mu \in \overline{M_1(\mathcal{H},\sigma)}$, $\omega_{s^T}(\mu) = \omega_s(u^* \times \mu \times u)$. Un cas très important que nous rencontrerons dans la suite, est celui où $\omega_s = \omega_{s^T}$, ce qui impliquera que $T \in S_\pi(\mathcal{H},\sigma)$. A l'aide de 1.2.3, on voit aisément que

3.3.2 $\begin{cases} \text{Pour tout } T \in S(H,\sigma) \text{ , } \omega_{s} = \omega_{s^T} \text{ , si et seulement si,} \\ [T, J]_- = 0 \text{ .} \end{cases}$

Donc $S^J(H,\sigma) = \{ T \in S(H,\sigma) \mid [J,T]_- = 0 \}$ est un sous-groupe de $S_\pi(H,\sigma)$. Il est évident que $J \in S^J(H,\sigma)$. En résumé, nous avons : $S^J(H,\sigma) \subset S_\pi(H,\sigma) \subset \mathrm{aut}_\pi(\overline{M_1(H,\sigma)})$.

3.4. Représentation de Fock "invariante de Lorentz" et $\mathcal{L}^\uparrow$

Plaçons-nous dans le cas où $H = K_m^+$ et où $\sigma(\varphi, \psi) = \mathcal{I}\{\int \varphi_F(\vec{k})^* \psi_F(\vec{k}) \, d\Omega_m(\vec{k})\}$ (voir [2] , chapitres IV et V). Si $\Lambda \in \mathcal{L}^\uparrow$, alors T_Λ défini par $T_\Lambda(\varphi) = \varphi \circ \Lambda^{-1}$ est un élément de $S(K_m^+, \sigma)$. Le nombre imaginaire i, définit sur (K_m^+, σ) une structure hilbertienne σ-permise. Evidemment $T_\Lambda \in S^i(K_m^+, \sigma)$, ce qui implique que $s^{T_\Lambda} = s$ où $s(\varphi,\psi) = \mathcal{R}\{\int \varphi_F(\vec{k})^* \psi_F(\vec{k}) \, d\Omega_m(\vec{k})\}$. Par conséquent, les éléments de $\mathcal{L}^\uparrow$ sont implémentables pour la représentation de Fock π_s .

4 - BOSONS SCALAIRES CHARGES

4.1. Introduction.

En utilisant les notations de [2] , les bosons scalaires chargés peuvent être décrits dans un formalisme symétrique de charge, qui sera exposé dans cette introduction.

Soit K_m^+ l'espace monoparticulaire des bosons, neutres de masse m . L'espace monoparticulaire des bosons chargés sera $K_m = K_m^+ \oplus K_m^+$ où $K_m^+ \oplus \{0\}$ sera l'espace des particules positives et $\{0\} \oplus K_m^+$ celui des particules négatives. L'espace des états du champ, des particules scalaires chargées sera :

$$\mathcal{S}(K_m) = \overset{\infty}{\underset{p=0}{\oplus}} S K_m^{\otimes p} .$$

Définissons les opérateurs $T_{\bar{x}}$, $\bar{x} \in M$ par $(T_{\bar{x}} f)(\bar{\xi}) = f(\bar{\xi} - \bar{x})$.

Les opérateurs de champ seront alors :

$$A(\bar{x}) = a^+\{(0, T_{\bar{x}}\Delta^+)\} + a^-\{(T_{\bar{x}}\Delta^+, 0)\} = a^+(\bar{x}) + a^-(\bar{x})$$

$$\tilde{A}(\bar{x}) = a^+\{(T_{\bar{x}}\Delta^+, 0)\} + a^-\{(0, T_{\bar{x}}\Delta^+)\} = \tilde{a}^+(\bar{x}) + \tilde{a}^-(\bar{x}).$$

On voit que $[a^-(\bar{x}), \tilde{a}^+(\bar{y})]_- = [\tilde{a}^-(\bar{x}) , a^+(\bar{y})]_- = \Delta^+(\bar{x}-\bar{y})$. Posons $\varphi_{\vec{k}}(\bar{x}) = (2\pi)^{-3/2} \left. \frac{e^{i(\bar{k}|\bar{x})}}{\sqrt{2\omega}} \right]_{k_0=\omega}$; nous savons que $(\varphi_{\vec{k}} \mid \varphi_{\vec{k}'}) = \delta(\vec{k}-\vec{k}')$.

Soient en outre $a^+(\vec{k}) = a^+\{(0, \varphi_{\vec{k}})\}$, $\tilde{a}^+(\vec{k}) = a^+\{(\varphi_{\vec{k}}, 0)\}$, $a^-(\vec{k}) = a^-\{(\varphi_{\vec{k}}, 0)\}$ et $\tilde{a}^-(\vec{k}) = a^-\{(0, \varphi_{\vec{k}})\}$. On voit que $[a^-(\vec{k}), \tilde{a}^+(\vec{k}')]_- = [\tilde{a}^-(\vec{k}), a^+(\vec{k}')]_- = \delta(\vec{k}-\vec{k}')$ et que $[A(\bar{x}), \tilde{A}(\bar{y})]_- = \Delta(\bar{x}-\bar{y})$.

Nous obtenons de véritables opérateurs de $\mathcal{S}(K_m)$, en les "étalant" à l'aide d'une fonction d'essai $f \in \mathcal{D}$:

$$A(f) = \int A(\bar{x}) f(\bar{x}) d\bar{x} = a^+\{(0, \Delta^+ * f)\} + a^-\{(\Delta^+ * f, 0)\}$$

$$\tilde{A}(f) = \int \tilde{A}(\bar{x}) f(\bar{x}) d\bar{x} = a^+\{(\Delta^+ * f, 0)\} + a^-\{(0, \Delta^+ * f)\}.$$

L'ensemble $\{\Delta^+ * f \mid f \in \mathcal{D}\}$ est dense dans K_m^+. Nous poserons donc dans la suite, pour tout $f \in K_m^+$:

$$A(f) = a^+\{(0, f)\} + a^-\{(f, 0)\}$$

$$\tilde{A}(f) = a^+\{(f, 0)\} + a^-\{(0, f)\}.$$

La conjugaison de charge C est un opérateur de K_m défini par : $C(f, g) = (g, f)$; d'où $C^2 = 1$. On voit que C est une bijection entre l'ensemble des particules positives et celui des particules négatives. Enfin, si $(f \mid g)$ est le produit scalaire de K_m^+, nous savons que celui de K_m est défini par :

$$\langle\!\langle (f, g) \mid (f', g') \rangle\!\rangle = (f \mid f') + (g \mid g').$$

Cette définition implique que, pour tout $\psi, \psi' \in K_m$, $\langle\!\langle C\psi \mid C\psi' \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \psi \mid \psi' \rangle\!\rangle$, donc $C \in S(K_m, \sigma)$.

<u>4.2. Cas d'un espace symplectique.</u>

Tout ce qui sera fait dans la suite est une généralisation de 4.1. et de [1].

Soit (H, σ) un espace symplectique représentant l'espace monoparticulaire des bosons scalaires neutres. Celui qui décrira les bosons scalaires chargés sera (H', σ') où $H' = H \oplus H$ et $\sigma'((f, g), (f', g')) = \sigma(f, f') + \sigma(g, g')$. La conjugaison de charge sera l'opérateur de H' défini par $C(f, g) = (g, f)$. $H \oplus \{0\}$ sera l'espace des particules positives et $\{0\}\oplus\mathcal{H}$ celui des particules négatives.

Considérons maintenant l'opérateur Γ de $\mathcal{H}'$, défini par $\Gamma(f,g)=(f,-g)$. Les opérateurs $P=\frac{1+\Gamma}{2}$ et $Q=\frac{1-\Gamma}{2}$ sont deux projecteurs complémentaires tels que $\mathrm{val}\,P=\mathcal{H}\oplus\{0\}$, $\mathrm{val}\,Q=\{0\}\oplus\mathcal{H}$, $P(f,g)=(f,0)$ et $Q(f,g)=(0,g)$. On remarquera de plus que, Γ et $C\in S(\mathcal{H}',\sigma')$ que $C^2=\Gamma^2=1$ et que $[\Gamma,C]_+=0$. Dorénavant, nous écritons pour tout $\Psi\in\mathcal{H}'$, $\Psi=P\Psi+Q\Psi=\Psi^++\Psi^-$. Evidemment $(C\Psi)^+=C\,\Psi^-$ et $(C\Psi)^-=C\,\Psi^+$.

Soient maintenant $p=\frac{1+C}{2}$ et $q=\frac{1-C}{2}$; ce sont deux projecteurs complémentaires tels que $p(f,g)=\left(\frac{f+g}{2},\frac{f+g}{2}\right)$ et $q(f,g)=\left(\frac{f-g}{2},-\frac{f-g}{2}\right)$. Pour tout $\Psi\in\mathcal{H}'$, posons $\Psi=p\Psi+q\Psi=\Psi_++\Psi_-$. Evidemment $(\Gamma\Psi)_+=\Gamma\Psi_-$ et $(\Gamma\Psi)_-=\Gamma\Psi_+$. Nous aurions donc aussi bien pu prendre pour espace des particules positives $\mathrm{val}\,p$, pour espace des particules négatives $\mathrm{val}\,q$ et pour conjugaison de charge Γ.

$\mathrm{val}\,P$, $\mathrm{val}\,Q$, $\mathrm{val}\,p$ et $\mathrm{val}\,q$ sont réguliers, car pour tout $\Psi,\Psi'\in\mathcal{H}'$ $\sigma'(X\Psi,X\Psi')=\sigma'(\Psi,X\Psi')$ où $X=P,Q,p,q$; en effet, si pour tout $\Psi\in\mathcal{H}'$, $0=\sigma'(X\Psi,X\Psi')=\sigma'(\Psi,X\Psi')$, comme σ' est régulier, nous avons $X\Psi'=0$.

Soit J un opérateur de $\mathcal{H}$, définissant une structure préhilbertienne σ-permise sur $\mathcal{H}$. En posant $J'(f,g)=(Jf,Jg)$, nous obtenons un opérateur de $\mathcal{H}'$, définissant une structure préhilbertienne σ'-permise sur $\mathcal{H}'$. La partie positive de la forme hermitienne correspondante est $s'((f,g),(f',g'))=-\sigma'(J'(f,g),(f',g'))=s(f,f')+s(g,g')$.
Evidemment $C\in S^{J'}(\mathcal{H}',\sigma')$; donc, la conjugaison de charge est implémentable pour la représentation de Fock $\pi_{s'}$ associée à $\omega_{s'}$.

De même que dans ([1] , chapitre 5), nous définissons l'opérateur de champ associé à la représentation de Fock $\pi_{\mathcal{S}'}$ par, $B_{\mathcal{S}'}(f,g) = -i \lim_{\lambda=0} \frac{\pi_{\mathcal{S}'}(\delta_{\lambda(f,g)}) - I}{\lambda}$, de façon que $\pi_{\mathcal{S}'}(\delta_{(f,g)}) = e^{iB_{\mathcal{S}'}(f,g)}$. Cet opérateur est identique à $a^+\{(f,g)\} + a^-\{(f,g)\}$, $(f,g) \in \mathcal{H}'$ défini sur l'espace de Hilbert $\mathcal{S}(\overline{\mathcal{H}}) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} S\overline{\mathcal{H}}^{\otimes p}$.

4.3. Conjugaison de charge sur un espace symplectique.

Soient $(\mathcal{H},\sigma)$ un espace symplectique et $\Gamma, C \in \mathcal{S}(\mathcal{H},\sigma)$ tels que $C^2 = \Gamma^2 = 1$ et $[C , \Gamma]_+ = 0$. Posons $P = \frac{1+\Gamma}{2}$, $Q = \frac{1-\Gamma}{2}$, $p = \frac{1+C}{2}$, $q = \frac{1-C}{2}$, $\operatorname{val} P = \mathcal{H}^+$, $\operatorname{val} Q = \mathcal{H}^-$, $\operatorname{val} p = \mathcal{H}_+$ et $\operatorname{val} q = \mathcal{H}_-$. On vérifie comme dans 4.2., que $\mathcal{H}^+$, $\mathcal{H}^-$, $\mathcal{H}_+$ et $\mathcal{H}_-$ sont des sous-espaces vectoriels réguliers de $\mathcal{H}$. Comme $CP = QC$ et $\Gamma p = q\Gamma$ on voit que C est une bijection linéaire de $\mathcal{H}^+$ sur $\mathcal{H}^-$ et Γ une bijection linéaire de $\mathcal{H}_+$ sur $\mathcal{H}_-$. Pour l'interprétation physique, nous avons donc le choix suivant : soit $\mathcal{H}^+$ et $\mathcal{H}^-$ seront les espaces positifs et négatifs respectivement avec C comme conjugaison de charge, soit $\mathcal{H}_+$ et $\mathcal{H}_-$ seront les espaces positifs et négatifs respectivement avec Γ comme conjugaison de charge. Il est clair que $\mathcal{H}^+$ est l'orthogonal de $\mathcal{H}^-$ et $\mathcal{H}_+$ celui de $\mathcal{H}_-$.

Une représentation de Fock π , sera dite compatible avec la conjugaison de charge C , si et seulement si, $C \in \mathcal{S}_\pi(\mathcal{H},\sigma)$.

5 - GROUPE DES AUTOMORPHISMES DE JAUGE DE $\overline{M_1(\mathcal{H},\sigma)}$

5.1. Préliminaires.

Soit $\mathcal{H}^\ell$ le dual algébrique de $\mathcal{H}$. Notons par U les nombres complexes de module unité, par M l'ensemble des fonctions $f : \mathcal{H} \longrightarrow U$ et vérifiant les deux propriétés : $f(x+y)=f(x).f(y)$, $f(\lambda x) = f(x)^\lambda$ pour tout $(x,y) \in \mathcal{H}\times\mathcal{H}$, pour tout $\lambda \in R$.

5.1.1. $\begin{cases} f \in M \text{ , si et seulement si, il existe une seule fonction} \\ \chi \in \mathcal{H}^\ell \text{ , vérifiant } f(x) = e^{i\chi(x)} \text{ pour tout } x \in \mathcal{H} \text{ .}\end{cases}$

Supposons que $f \in M$. Il est clair que $f(x) = e^{i\chi(x)}$ où χ est une fonction : $\mathcal{H} \longrightarrow R$. Nous devons montrer que $\chi \in \mathcal{H}^\ell$. Puisque $f(\lambda x) = f(x)^\lambda$, nous avons $e^{i\chi(\lambda x)} = e^{i\lambda\chi(x)}$; d'après ([6],9.5.5) $\chi(\lambda x) = \lambda\chi(x) + 2\pi n(\lambda,x)$ où $n : R\times\mathcal{H} \longrightarrow Z$, Z étant l'ensemble des entiers positifs, négatifs et nul. Donc $\chi(\lambda\rho x) = \lambda\rho\chi(x) + 2\pi n(\lambda\rho,x) = \lambda\chi(\rho x) + 2\pi n(\lambda,\rho x) = \lambda\rho\chi(x) + 2\pi\lambda n(\rho,x) + 2\pi n(\lambda,\rho x)$ et $\lambda n(\rho,x) = n(\lambda\rho,x) - n(\lambda,\rho x)$. Si $\lambda \in R-Q$ (Q étant l'ensemble des rationnels) cette dernière égalité nous montre que $n(\rho,x) = 0$ pour tout $\rho \in R$ et pour tout $x \in \mathcal{H}$. Il ne reste plus qu'à montrer l'additivité de χ . De $f(x+y) = f(x).f(y)$ et de ([6], 9.5.5.) nous tirons que $\chi(x+y) = \chi(x) + \chi(y) + 2\pi m(x,y)$ où $m : \mathcal{H}\times\mathcal{H} \longrightarrow Z$. Donc $\chi(\rho(x+y)) = \rho\chi(x+y) = \rho\chi(x) + \rho\chi(y) + 2\pi\rho m(x,y) = \chi(\rho x) + \chi(\rho y) + 2\pi m(\rho x,\rho y)$ et $m(\rho x,\rho y) = \rho m(x,y)$. En prenant à nouveau $\rho \in R-Q$ nous voyons que $m(x,y) = 0$ pour tout x et $y \in \mathcal{H}$.

L'unicité de χ est immédiate à établir : si χ et $\chi' \in \mathcal{H}^\ell$ et si $e^{i\chi(x)} = e^{i\chi'(x)}$ pour tout $x \in \mathcal{H}$, ([6], 9.5.5.) implique que $\chi(x) = \chi'(x) + 2\pi n(x)$ où $n : \mathcal{H} \longrightarrow Z$. Par un raisonnement analogue au précédent nous voyons que $n = 0$.

La réciproque est évidente.

5.1.2. Si $\mathcal{H}$ est un espace vectoriel topologique et f un élément de M $\left(f(x) = e^{i\chi(x)}\right.$ où $\left.\chi \in \mathcal{H}^{f}\right)$, alors, f est continue si et seulement si χ est continue..

Si χ est continue, f est continue puisqu'elle est la composition de deux fonctions continues (voir [6], 9.5.7.))

Supposons que f soit continue. Pour tout ε, $0 < \varepsilon < 1$, nous savons que $\varphi : t \longrightarrow e^{it}$ est un homéomorphisme de $]-\varepsilon, +\varepsilon[$ sur $\varphi(]-\varepsilon,+\varepsilon[) = V_\varepsilon$ puisque $V_\varepsilon \neq U$ (voir ([6], 9.5.7.)). V_ε étant un voisinage de 1, $f^{-1}(V_\varepsilon) = W_\varepsilon$ est un voisinage de 0 dans $\mathcal{H}$. Nous allons montrer que $\chi(W_\varepsilon) \subset]-\varepsilon, +\varepsilon[$. Pour tout $x \in W_\varepsilon$ (puisque l'application $\rho \longrightarrow \rho x$ est continue), $\exists\, \rho$, $0 < \rho < 1$ tel que $\rho x \in W_\varepsilon$. $f(x) = e^{i\chi(x)} \in V_\varepsilon$ donc il existe $t(x) \in]-\varepsilon, +\varepsilon[$ tel que $e^{i\chi(x)} = e^{it(x)}$, ce qui implique que $\chi(x) = t(x) + 2\pi n(x)$. De même $\chi(\rho x) = t(\rho x) + 2\pi n(\rho x) = \rho t(x) + 2\pi \rho n(x)$ Comme $0 < \rho < 1$, $\rho t(x) \in]-\varepsilon, +\varepsilon[$ et $t(\rho x) = \rho t(x)$ (car φ est une bijection). D'où nous tirons que $n(\rho x) = \rho n(x)$ et que $n = 0$ en prenant $\rho \in R - Q$.

Si $\mathcal{H}$ est l'espace monoparticulaire , A l'opérateur de champ, la transformation de jauge la plus générale de A , est de la forme : $A \longrightarrow A_\chi = A + \chi$ où χ est R-linéaire à valeurs dans R . Pour obtenir une pareille transformation, pour toute représentation de Fock, nous devons trouver un élément de $\mathrm{aut}\left(\overline{M,(\mathcal{H},\sigma)}\right)$ qui transforme δ_ψ en $(\delta_\psi)^\chi = e^{i\chi(\psi)}\delta_\psi$, car $\pi((\delta_\psi)^\chi) = \pi(e^{i\chi(\psi)}\delta_\psi) = e^{i[A(x)+\chi(x)]} = \pi^\chi(\delta_\psi)$, ce qui justifie le paragraphe suivant.

5.2. Automorphismes de jauge.

5.2.1. Pour tout $\chi \in \mathcal{H}^f$, l'application $f \longrightarrow f^\chi$ où $f^\chi(\psi) = e^{i\chi(\psi)} f(\psi)$ pour tout $\psi \in \mathcal{H}$, est un automorphisme de $\mathcal{C}_o(E)$, quel que soit $E \in \mathcal{G}$.

En utilisant 3.1.3. cette proposition est immédiate.

D'après 3.1.4. et 3.2., l'automorphisme $f \longrightarrow f^\chi$, induit sur $\overline{M_1(\mathcal{H},\sigma)}$ un automorphisme $\zeta_\chi : \mu \longrightarrow \mu^\chi$. Ce dernier agit sur $\mathcal{M}_1(\mathcal{H},\sigma)$ de la façon suivante : pour tout $\widehat{(\mu_\alpha, E_\alpha)} \in \mathcal{M}_1(\mathcal{H},\sigma)$, $\widehat{(\mu_\alpha, E_\alpha)}^\chi = \widehat{(\mu_\alpha^\chi, E_\alpha)}$, où $\mu_\alpha^\chi(f) = \mu_\alpha(f^\chi)$ quel que soit $f \in \mathcal{C}_o(E_\alpha)$. En particulier nous avons :

5.2.2. Pour tout $\chi \in \mathcal{H}^f$ et pour tout $\psi \in \mathcal{H}$, $(\delta_\psi)^\chi = e^{i\chi(\psi)} \delta_\psi$.

5.2.3. $\mathcal{H}^f$ étant considéré comme un groupe additif, l'application

$$\zeta : \mathcal{H}^f \longrightarrow \mathrm{aut}(\overline{M_1(\mathcal{H},\sigma)})$$
$$\chi \longrightarrow \zeta_\chi$$

est un monomorphisme.

Supposons que $\zeta_\chi = \zeta_{\chi'}$. Pour tout $\widehat{(\mu_\alpha, E_\alpha)} \in \mathcal{M}_1(\mathcal{H},\sigma)$, $\widehat{(\mu_\alpha^\chi, E_\alpha)} = \widehat{(\mu_\alpha^{\chi'}, E_\alpha)}$, ce qui implique que $\mu_\alpha^\chi = \mu_\alpha^{\chi'}$, c'est-à-dire $\mu_\alpha(f^\chi) = \mu_\alpha(f^{\chi'})$ quel que soit $f \in \mathcal{C}_o(E_\alpha)$. $M_1(E_\alpha, \sigma)$ séparant $\mathcal{C}_o(E_\alpha)$, $f^\chi = f^{\chi'}$ quel que soit $f \in \mathcal{C}_o(E_\alpha)$. En tenant compte de 5.1.1. nous avons $\chi | E_\alpha = \chi' | E_\alpha$. E_α étant quelconque dans $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}$ étant absorbant pour $\mathcal{H}$, nous avons $\chi = \chi'$. En outre, sur $\mathcal{M}_1(\mathcal{H},\sigma)$, on voit que $\zeta_{\chi+\chi'} = \zeta_\chi \cdot \zeta_{\chi'}$ car $f^{\chi+\chi'} = (f^\chi)^{\chi'} = (f^{\chi'})^\chi$.

Le groupe additif $\mathcal{H}^f$ sera donc considéré dans la suite, comme un sous-groupe (commutatif) du groupe des automorphismes de $\overline{M_1(\mathcal{H},\sigma)}$.

5.3. Automorphismes de jauge implémentables pour une représentation de Fock

Soit π_s une représentation de Fock particulière. Nous noterons par H_s^*, le sous groupe additif de H^ℓ formé des éléments de H^ℓ, continu s pour la norme $\|\psi\|^2 = s(\psi,\psi)$, $\psi \in H$.

5.3.1. $\left\{ H^\ell \cap \mathrm{aut}_\pi(\overline{M_1(H,\sigma)}) = H_s^* \right.$.

Autrement dit, nous allons démontrer que ζ_χ est implémentable pour π_s, si et seulement si, $\chi \in H_s^*$. Supposons que ζ_χ soit implémentable pour π_s. D'après 1.2.2. et 2.3.2., il existe un élément unitaire u de $\overline{M_1(H,\sigma)}$ tel que $\omega_s(u^* \times \delta_\psi \times u) = \omega_s((\delta_\psi)^\chi) = e^{i\chi(\psi)}\Omega'(\psi)$. D'après la remarque de 1.3.2 et d'après 5.1.2. nous voyons que $\chi \in H_s^*$. Réciproquement, supposons que $\chi \in H_s^*$. D'après le théorème de Riesz (voir [5], page 89), il existe $\psi_0 \in \overline{H}$ tel que $\chi(\psi) = s(\psi_0,\psi)$, pour tout $\psi \in H$. Si nous posons $u = -\frac{1}{2} J\psi_0$, alors $\chi(\psi) = \sigma(2u,\psi)$ et $u \in \overline{H}$. 1.3.3. nous montre que $\pi(\delta_u)$ appartient à $\mathcal{L}(I_{\Omega'})$; donc $\pi(\delta_u)\pi(\mu)\pi(\delta_u)^*$ appartient aussi à $\mathcal{L}(I_{\Omega'})$. Nous allons démontrer que pour tout $\mu \in \mathcal{M}_1(H,\sigma)$, $\pi^\chi(\mu) = \pi(\delta_u)\,\pi(\mu)\,\pi(\delta_u)^*$. π étant continue cette égalité s'étendra à $\overline{M_1(H,\sigma)}$. Afin de calculer l'expression $\pi(\delta_u)\pi(\mu)\,\pi(\delta_u)^*$ nous allons utiliser comme intermédiaire de calcul $\mathcal{M}_1(\overline{H},\sigma)$ et $\mathcal{M}_1(\overline{H},\sigma)/_{N'_\omega}$ où $N'_\omega = \{\mu \in \overline{M_1(\overline{H},\sigma)} \mid \omega(\mu^* \times \mu) = 0\}$. Nous savons que $\mathcal{M}_1(H,\sigma) \subset \mathcal{M}_1(\overline{H},\sigma)$ ([1], théorème 22) et que $\mathcal{M}_1(H,\sigma)/_{N_\omega} \subset \mathcal{M}_1(\overline{H},\sigma)/_{N'_\omega}$ car si $\hat{\mu} \in \mathcal{M}_1(H,\sigma)/_{N_\omega}$ et $\bar{\mu} \in \mathcal{M}_1(\overline{H},\sigma)/_{N'_\omega}$, $\|\hat{\mu}\|^2 = \omega(\hat{\mu}^* \times \hat{\mu}) = \omega(\mu^* \times \mu) = \omega(\bar{\mu}^* \times \bar{\mu}) = \|\bar{\mu}\|^2$. Soit π' la représentation régulière gauche de $\mathcal{M}_1(\overline{H},\sigma)$ dans $\mathcal{M}_1(\overline{H},\sigma)/_{N'_\omega}$ et π celle de $\mathcal{M}_1(H,\sigma)$ dans $\mathcal{M}_1(H,\sigma)/_{N_\omega}$. Evidemment, pour tout $\mu \in \mathcal{M}_1(H,\sigma)$, $\pi(\mu) = \pi'(\mu) \mid \mathcal{M}_1(H,\sigma)/_{N_\omega}$. Pour tout $\widehat{(\mu_\alpha, E_\alpha)} \in \mathcal{M}_1(H,\sigma)$, $\pi'(\delta_u)\pi(\widehat{(\mu_\alpha,E_\alpha)})\pi'(\delta_u)^* \mid I_{\Omega'} = \pi'(\delta_u \times \widehat{(\mu_\alpha,E_\alpha)} \times \delta_u) \mid I_{\Omega'} =$ $\pi'(\widehat{(\delta_u \times \mu_\alpha \times \delta_u, E_\alpha)}) \mid I_{\Omega'} = \pi(\widehat{(\mu_\alpha^\chi, E_\alpha)}) = \pi^\chi(\widehat{(\mu_\alpha,E_\alpha)})$.

6 - FORMES POSITIVES ANTILINEAIRES ET REPRESENTATIONS ANTILINEAIRES D'UNE C^*-ALGEBRE

6.1. Morphismes et a-morphismes de C^*-algèbres.

Dans tout ce qui suit, le préfixe "a" sera mis pour "antilinéaire".

6.1.1. Soient $\mathfrak{A}$ une algèbre de Banach involutive, $\mathfrak{B}$ une C^*-algèbre, π un a-morphisme de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$. On a $\|\pi(x)\| \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in \mathfrak{A}$.

La démonstration de cette proposition est identique à celle de ([3] , 1.3.7.). La seule variation est : $Sp'_{\mathfrak{B}} \pi(x) \subset \overline{Sp'_{\mathfrak{A}} x} = Sp'_{\mathfrak{A}} x^*$

6.1.2. Soient $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ deux C^*-algèbre, π un a-morphisme injectif de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$. On a $\|x\| \leqslant \|\pi(x)\|$ pour tout $x \in \mathfrak{A}$.

D'après 6.1.1. nous savons que π est continue, ce qui implique, que $\pi(\mathfrak{A})$ est une sous C^*-algèbre de $\mathfrak{B}$. ([3], 1.3.10) nous montre que $Sp'_{\pi(\mathfrak{A})} \pi(x) = Sp'_{\mathfrak{B}} \pi(x)$. Par conséquent la démonstration de 6.1.1. peut être refaite pour π^{-1} qui est un a-morphisme de $\pi(\mathfrak{A})$ sur $\mathfrak{A}$. Donc $\|\pi^{-1}(\pi(x))\| = \|x\| \leqslant \|\pi(x)\|$.

Les propositions 6.1.1. et 6.1.2., nous montrent donc, que les a-isomorphismes et les a-automorphismes de C^*-algèbres conservent les normes.

6.2. a-formes positives et a-représentations.

6.2.1. Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre de Banach. L'application $f \longrightarrow \bar{f}$ où $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$ pour tout $x \in \mathfrak{A}$, est une bijection entre l'ensemble des a-formes positives de $\mathfrak{A}$ et l'ensemble des formes positives de $\mathfrak{A}$.

La proposition est évidente. Cette application va nous permettre de trouver pour les a-formes positives, toutes les propriétés des formes positives. Notamment, nous avons :

6.2.2. Pour toute a-forme positive de $\mathfrak{A}$, $\|f\| = \|\overline{f}\|$ et f est pure si et seulement si $\overline{f}$ est pure.

Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ deux espaces de Hilbert et U une application de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}'$. Nous dirons que U est un a-isomorphisme de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}'$, si et seulement si, U est une bijection antilinéaire vérifiant pour tout $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$, $(U\psi | U\varphi) = (\psi | \varphi)$. Quand $\mathcal{H}$ sera égal à $\mathcal{H}'$, nous dirons que U est un opérateur antiunitaire de $\mathcal{H}$.

Soient $\mathfrak{A}$ une algèbre de Banach involutive, π une représentation de $\mathfrak{A}$ dans $\mathcal{H}$ et π' une a-représentation de $\mathfrak{A}$ dans $\mathcal{H}'$. Nous dirons que π et π' sont a-équivalents, si et seulement si, il existe un a-isomorphisme U de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}'$ tel que $\pi'(x) = U\pi(x)U^{-1}$ pour tout $x \in \mathfrak{A}$.

6.2.3. Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre involutive.

(i) Si π' est une a-représentation de $\mathfrak{A}$ dans $\mathcal{H}'$, et si $\xi' \in \mathcal{H}'$, $x \longrightarrow (\xi' | \pi'(x)\xi')$ est une a-forme positive sur $\mathfrak{A}$.

(ii) Soient π une représentation de $\mathfrak{A}$ dans $\mathcal{H}$ et π' une a-représentation de $\mathfrak{A}$ dans $\mathcal{H}'$; soit ξ (resp. ξ') un vecteur totalisateur de π (resp. π'). Si $(\xi | \pi(x)\xi) = (\pi'(x)\xi' | \xi')$ pour tout $x \in \mathfrak{A}$, il existe un a-isomorphisme unique de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}'$ transformant π en π' et ξ en ξ'.

(i) est évident. Plaçons nous dans les conditions de (ii). Soit U l'application de $\pi(\mathfrak{A})\xi$ dans H' définie par $U(\pi(x)\xi)=\pi'(x)\xi'$. U est antilinéaire car $U(\alpha\pi(x)\xi+\beta\pi(y)\xi)=U(\pi(\alpha x+\beta y)\xi)=\pi'(\alpha x+\beta y)\xi'=\bar{\alpha}\,\pi'(x)\xi'+\bar{\beta}\,\pi'(y)\xi'=\bar{\alpha}\,U(\pi(x)\xi)+\bar{\beta}\,U(\pi(x)\xi)$, U inverse le produit scalaire : $(U\pi(x)\xi\,|\,U\pi(y)\xi)=(\pi'(x)\xi'\,|\,\pi'(y)\xi')$ $(\pi'(y^*x)\xi'\,|\,\xi')=(\xi\,|\,\pi(y^*x)\xi)=(\pi(y)\xi\,|\,\pi(x)\xi)$.
En particulier $\|U\pi(x)\xi\|=\|\pi(x)\xi\|$, ce qui implique que U est continue sur $\pi(\mathfrak{A})\xi$ qui est dense dans H. D'où nous tirons que U admet une extension à H, unique, inversant le produit scalaire. Comme $\pi'(\mathfrak{A})\xi'$ est dense dans H', U est bien un a-isomorphisme de H sur H'. U transforme π en π', c'est-à-dire, $U\pi(x)=\pi'(x)U$ pour tout $x\in\mathfrak{A}$, car pour tout $y\in\mathfrak{A}$ nous avons, $(U\pi(x))(\pi(y)\xi)=U\pi(xy)\xi=\pi'(xy)\xi'=\pi'(x)\pi'(y)\xi'=(\pi'(x)U)(\pi(y)\xi)$. Comme $\pi(\mathfrak{A})\xi$ est dense dans H, nous avons bien $U\pi(x)=\pi'(x)U$. En outre, pour tout $x\in\mathfrak{A}$, $(\pi'(x)\xi'\,|\,\xi')=(\xi\,|\,\pi(x)\xi)=(U\pi(x)\xi\,|\,U\xi)=(\pi'(x)\xi'\,|\,U\xi)$, d'où $\xi'=U\xi$.

Si π était aussi une a-représentation, alors U serait un isomorphisme et la démonstration du théorème serait identique à celle de ([3], 2.4.1.).

Soient $\mathfrak{A}$ une algèbre de Banach involutive , $\tilde{\mathfrak{A}}$ l'algèbre involutive déduite de $\mathfrak{A}$ par adjonction d'un élément unité, f une a-forme positive continue sur $\mathfrak{A}$ et π une a-représentation de $\mathfrak{A}$ dans H . Les prolongements canoniques $\tilde{f}$ et $\tilde{\pi}$, de f et π respectivement, à $\tilde{\mathfrak{A}}$ sont donnés par $\tilde{f}(\lambda+x)=\bar{\lambda}\|f\|+f(x)$ et $\tilde{\pi}(\lambda+x)=\bar{\lambda}\,I+\pi(x)$, où I est l'opérateur identité dans H . Si de plus $f(x)=(\xi\,|\,\pi(x)\xi)$ pour tout $x\in\mathfrak{A}$, alors $\tilde{f}(x)=(\xi\,|\,\tilde{\pi}(x)\xi)$ pour tout $x\in\tilde{\mathfrak{A}}$. $\tilde{f}$ a les mêmes propriétés que les extensions canoniques des formes positives de $\mathfrak{A}$.

6.2.4. Soient $\mathfrak{A}$ une algèbre de Banach involutive possédant une unité apparochée, $\tilde{\mathfrak{A}}$ l'algèbre involutive déduite de $\mathfrak{A}$ par adjonction d'un élément unité, f une a-forme positive continue sur $\mathfrak{A}$, $\tilde{f}$ son prolongement canonique à $\tilde{\mathfrak{A}}$, M l'idéal à droite de $\tilde{\mathfrak{A}}$ formé des $x \in \tilde{\mathfrak{A}}$ tels que $\tilde{f}(x^*x)=0$, $\mathfrak{A}'_f$ l'espace préhilbertien séparé $\tilde{\mathfrak{A}}/_M$ et $\mathfrak{A}_f$ l'espace de Hilbert complété de $\mathfrak{A}'_f$. Pour tout $x \in \tilde{\mathfrak{A}}$, soit $\pi'(x)$ l'opérateur dans $\tilde{\mathfrak{A}}/_M$ déduit par passage au quotient de la multiplication à droite par x^* dans $\tilde{\mathfrak{A}}$. Soit ξ l'image canonique de 1 dans $\mathfrak{A}'_f$.

(i) Chaque $\pi'(x)$ se prolonge de manière unique en un opérateur linéaire continue $\pi(x)$ dans $\mathfrak{A}_f$.

(ii) L'application $x \longrightarrow \pi(x)$ $(x \in \mathfrak{A})$ est une a-représentation de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}_f$.

(iii) ξ est totalisateur pour $\pi(\mathfrak{A})$.

(iv) $f(x)=(\xi|\pi(x)\xi)$ pour tout $x \in \mathfrak{A}$.

Posons $(x|y)=\tilde{f}(xy^*)$. C'est bien un produit scalaire sur $\tilde{\mathfrak{A}}$ puisqu'il est antilinéaire en x, linéaire en y et que $\tilde{f}(x^*x)\geqslant 0$, pour tout $x \in \tilde{\mathfrak{A}}$. Ceci prouve que $\tilde{f}(xy^*)=\overline{\tilde{f}(yx^*)}$ et que $|\tilde{f}(xy^*)|^2 \leqslant \tilde{f}(xx^*)\ \tilde{f}(yy^*)$. Nous voyons donc que $x \in M$, si et seulement si, $\tilde{f}(xy)=\tilde{f}(yx^*)=0$ pour tout $y \in \tilde{\mathfrak{A}}$. Notons les éléments de $\tilde{\mathfrak{A}}/_M$ par $\hat{x}$ où x est un élément quelconque de la classe considérée. Evidemment $\xi=\hat{1}$ et $\pi'(x)\xi=\widehat{x^*}$. Posons $(\hat{x}|\hat{y})=\tilde{f}(xy^*)$. C'est bien un produit scalaire sur $\tilde{\mathfrak{A}}/_M$, puisque si $x'=x+h$ et $y'=y+t$, h et $t \in M$, $\tilde{f}(y'x'^*)=\tilde{f}(yx^*)+\tilde{f}(tx^*)+\tilde{f}(yh^*)+\tilde{f}(th^*)=\tilde{f}(yx^*)$. $\mathfrak{A}'_f$ muni de ce produit scalaire est un espace préhilbertien séparé car $(\hat{x}|\hat{x})=0$, si et seulement si $\tilde{f}(xx^*)=0$, c'est-à-dire, si et seulement si, $\hat{x} = \hat{0}$. $\mathfrak{A}_f$ est le complété de $\mathfrak{A}'_f$. Dans la proposition 6.2.4. nous démontrons pour les a-formes positives , ce qui est démontré dans ([3], 2.4.4.) pour les formes positives. Compte tenu du fait que le produit scalaire est pris ici antilinéaire par rapport à la première variable et linéaire par rapport à la seconde, les deux démonstrations sont identiques. Les remarques ([3], 2.4.5. et 2.4.6.) restent vraies dans le cas des a-formes positives et des a-représentations d'espaces de Banach involutives admettant une unité approchée.

6.2.5. Soient $\mathfrak{A}$ une algèbre de Banach involutive à unité approchée et f une forme positive continue sur $\mathfrak{A}$. Evidemment $\overline{\tilde{f}}$ est une a-forme positive. Soient π et ξ la représentation et le vecteur donnés par ([3], 2.4.4.) associées à f , $\overline{\pi}$ et $\overline{\xi}$ la représentation et le vecteur donnés par 6.2.4. associés à $\overline{\tilde{f}}$, alors π et $\overline{\pi}$ sont a-équivalents.

Avec nos notations $\tilde{f}(x) = (\xi \mid \pi(x)\xi)$, $\tilde{f}(x^*y) = (\pi(x)\xi \mid \pi(y)\xi)$, $\overline{\tilde{f}}(x) = (\overline{\xi} \mid \overline{\pi}(x)\overline{\xi}) = \tilde{f}(x^*)$ et $\overline{\tilde{f}}(y^*x) = (\overline{\pi}(y)\overline{\xi} \mid \overline{\pi}(x)\overline{\xi}) = \tilde{f}(x^*y)$. D'où $(\pi(x)\xi \mid \pi(y)\xi) = (\overline{\pi}(y)\overline{\xi} \mid \overline{\pi}(x)\overline{\xi})$. Comme ξ (resp. $\overline{\xi}$) est cyclique pour $\pi(\mathfrak{A})$ (resp. $\overline{\pi}(\mathfrak{A})$), 6.2.3. nous montre que π et $\overline{\pi}$ sont a-équivalents. De 6.2.5. et ([3], 2.4.6.) nous tirons que toute a-représentation cyclique, d'une algèbre de Banach involutive possédant une unité approchée, est a-équivalente à une représentation.

6.2.6. Soient f_1 un état pur et f_2 un a-état pur d'une C^*-algèbre $\mathfrak{A}$, π_1 une représentation associée à f_1 , π_2 une a-représentation associée à f_2 , alors π_1 et π_2 sont a-équivalents, si et seulement si, il existe un élément unitaire $u \in \mathfrak{A}$ tel que, pour tout $x \in \mathfrak{A}$, $f_1(x) = \overline{f_2}(u^* x u)$.

Cette proposition se déduit immédiatement de 6.2.5. et de ([3], 2.8.6.)

7 - AUTOMORPHISMES ANTILINEAIRES DE $\overline{M_1(\mathcal{H},\sigma)}$, INDUITS PAR LES OPERATEURS ANTISYMPLECTIQUES

7.1. Opérateurs antisymplectiques.

Dans les mêmes conditions que 3.1. nous dirons d'un opérateur linéaire T de $\mathcal{H}$, qu'il est antisymplectique, si et seulement si, T est surjective et pour tout $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$, $\sigma(T\psi, T\varphi) = -\sigma(\psi,\varphi)$.

Notons par $AS(\mathcal{H},\sigma)$ l'ensemble des opérateurs antisymplectiques de $(\mathcal{H},\sigma)$.

7.1.1. (Pour tout $T \in AS(\mathcal{H},\sigma)$, T est régulier et $T^{-1} \in AS(\mathcal{H},\sigma)$.

7.1.2. (Soient E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$, T un élément de $AS(\mathcal{H},\sigma)$; E est régulier, si et seulement si, TE est régulier.

7.1.3. (Pour tout $T \in AS(\mathcal{H},\sigma)$, l'application $f \longrightarrow f^T$ où $f^T(\psi) = \overline{f}(T\psi)$ est un a-isomorphisme de $\mathcal{C}_0(E)$ sur $\mathcal{C}_0(T^{-1}E)$.

7.1.4. (Pour tout $T \in AS(\mathcal{H},\sigma)$, l'application $\tau_T : \mu \longrightarrow \mu^T$ où $\mu^T(f) = \overline{\mu(f^T)}$ est un a-isomorphisme de $M_1(E,\sigma)$ sur $M_1(TE,\sigma)$ et de $\overline{M_1(E,\sigma)}$ sur $\overline{M_1(TE,\sigma)}$.

7.1.5. (Pour tout $T \in AS(\mathcal{H},\sigma)$, $(\delta_\psi)^T = \delta_{T\psi}$.

Ces propositions ont des démonstrations analogues à celles de 2.1.1, 2.1.2, 2.1.4, 2.1.5 et 2.1.7.

7.1.6. (Pour tout $\mu \in \overline{M_1(\mathcal{H},\sigma)}$, $\|\mu^T\| = \|\mu\|$ quel que soit $T \in AS(\mathcal{H},\sigma)$.

Cette proposition se déduit de 6.1.2, 6.1.3 et 7.1.4.

7.2. A-automorphismes de $\overline{M_1(\mathcal{H}, \sigma)}$ induits par les éléments de $AS(\mathcal{H},\sigma)$

Nous nous plaçons dans les mêmes conditions que dans 3.2. Les propositions 3.2.1. et 3.2.2. restent vraies. Nous conservons donc la définition donnée dans 3.2.

7.2.1. Pour tout $T \in AS(\mathcal{H},\sigma)$, $\omega_s^T = \overline{\omega_{sT}}$.

Tout élément de a-aut $(\overline{M_1(\mathcal{H},\sigma)})$ étant continu, ω^T est continue pour tout $T \in AS(\mathcal{H},\sigma)$. Il suffit donc d'établir l'égalité sur $\mathcal{M}_1(\mathcal{H},\sigma)$: pour tout $\widehat{(\mu_\alpha, E_\alpha)} \in \mathcal{M}_1(\mathcal{H},\sigma)$, $\omega_s^T(\widehat{(\mu_\alpha,E_\alpha)}) = \omega_s(\widehat{(\mu_\alpha^T, TE_\alpha)}) =$ $\mu_\alpha^T(\Omega'_s \mid TE_\alpha) = \overline{\mu_\alpha(\Omega'^T_s \mid E_\alpha)} = \overline{\mu_\alpha(\Omega'_{sT} \mid E_\alpha)} = \overline{\omega_{sT}}\ (\widehat{(\mu_\alpha, E_\alpha)})$.

7.2.2. L'application
$$\tau : AS(\mathcal{H},\sigma) \longrightarrow a\text{-aut}(\overline{M_1(\mathcal{H},\sigma)})$$
$$T \longrightarrow \tau_T$$
est injective.

Par l'intermédiaire de τ, $S(\mathcal{H},\sigma) \cup AS(\mathcal{H},\sigma)$ est un sous-groupe du groupe $\text{aut}(\overline{M_1(\mathcal{H},\sigma)}) \cup a\text{-aut}(\overline{M_1(\mathcal{H},\sigma)})$.

7.3. Etude de $AS_\pi(\mathcal{H},\sigma)$.

7.3.1. Pour tout $T \in AS(\mathcal{H},\sigma)$, $\omega_s = \omega_{sT}$, si et seulement si, $[J,T]_+ = 0$.

Donc $AS^T(\mathcal{H},\sigma) = \{T \in AS(\mathcal{H},\sigma) \mid [J,T]_+ = 0\}$ est un sous ensemble de $AS_\pi(H,\sigma)$.

7.3.2. $\begin{cases} T \in AS_{\pi}(H,\sigma), \text{ si et seulement si, il existe un unitaire} \\ u \text{ de } \overline{M_1(H,\sigma)} \text{ tel que } \omega^T(\mu) = \overline{\omega}(u^* \times \mu \times u). \end{cases}$

Cette proposition se déduit immédiatement de 6.2.6.

7.4. Représentation de Fock "invariante de Lorentz" et $\mathcal{L}^{\downarrow}$

Nous prenons les notations de 3.4., sauf pour $\Lambda \in \mathcal{L}^{\downarrow}$, nous prenons $[T_\Lambda(\varphi)](\psi) = \overline{(\varphi.\Lambda^{-1})(\psi)} = \overline{\varphi(\Lambda^{-1}\psi)}$. Comme $[T_\Lambda, i]_+$, 7.3.1. montre que pour tout $\Lambda \in \mathcal{L}^{\downarrow}$, $T_\Lambda \in AS^i(K_m^+,\sigma)$, c'est-à-dire que les éléments de $\mathcal{L}^{\downarrow}$ sont implémentables pour la représentation de Fock induite par i.

REFERENCES

[1] D. Kastler — The C^*-algebras of a free boson field ; I - Discussion of the Basic Facts (Commun. math. Phys. 1, 14-18, (1965))

[2] D. Kastler — Introduction à l'électrodynamique quantique, Dunod 1961, Paris.

[3] J. Dixmier — Les C^*-algèbres et leurs représentations Gauthier-Villars 1964, Paris.

[4] D. Testard — Algèbres covariantes (à paraître).

[5] M.A. Naimark — Normed Rings Noordhoff-Groningen. The Netherlands - 1959.

[6] J. Dieudonné — Fondements de l'analyse moderne Gauthier-Villars 1963, Paris.

-o-o-o-