

Étude de quelques automorphismes de la C^* -algèbre du champ de bosons libres

par

J. MANUCEAU

ABSTRACT. — This paper is devoted to the study of symplectic (resp. antisymplectic) operators acting upon the one-particle state space. It is shown that they induce automorphisms (resp. antiautomorphisms) of the C^* -algebra of a free boson field, as defined in [1]. We apply this study to the gauge transformations and the impulsion and energy groups. We also define the « second kind » gauge automorphisms and we give an implementation criterium for any Fock representation.

Soit H un espace vectoriel réel, σ une forme symplectique sur H , c'est-à-dire, une forme bilinéaire antisymétrique ($\sigma(\psi, \varphi) = -\sigma(\varphi, \psi)$ pour tout ψ et $\varphi \in H$), régulière ($\sigma(\psi, \varphi) = 0$ pour tout $\varphi \in H$, implique $\psi = 0$). La C^* -algèbre du champ de bosons libres $\overline{M}_1(H, \sigma)$ a été définie et étudiée dans la référence [1]. Appelons opérateur symplectique (resp. antisymplectique) de (H, σ) tout opérateur linéaire surjectif T , vérifiant $\sigma(T\psi, T\varphi) = \sigma(\psi, \varphi)$ (resp. $\sigma(T\psi, T\varphi) = -\sigma(\psi, \varphi)$) pour tout ψ et $\varphi \in H$. Nous montrons que ces opérateurs induisent sur $\overline{M}_1(H, \sigma)$ des automorphismes (resp. antiautomorphismes) qui généralisent les automorphismes (resp. antiautomorphismes) induits par le groupe de Lorentz \mathcal{L}^1 (resp. \mathcal{L}^4). Pour toute représentation de Fock, nous donnons un critère d'implémentation de ces automorphismes (resp. antiautomorphismes). Pour chaque

structure préhilbertienne σ -permise, nous étudions quelques sous-groupes importants du groupe des opérateurs symplectiques : groupe de jauge de 1^{re} espèce (d'où l'existence de l'opérateur « nombre de particules ») et les groupes d'impulsion-énergie (d'où l'existence des opérateurs « impulsion-énergie »). Nous faisons en outre une étude du spin isotopique et des opérateurs d'isospin, cette étude étant appliquée ensuite au cas particulier des bosons scalaires chargés et de la conjugaison de charge. Nous définissons enfin les automorphismes de jauge de 2^e espèce et donnons un critère d'implémentation pour une représentation de Fock quelconque.

1. — COMPLÉMENTS SUR $\overline{M_1(H, \sigma)}$

1.1. Étude de la forme positive ω_x .

D'après ([1], théorème 21), nous savons que $\mathcal{M}_1(H, \sigma)$ et $\overline{M_1(H, \sigma)}$ ne dépendent pas du système \mathcal{S} . Nous choisirons donc comme système \mathcal{S} , l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels réguliers de H , de dimension finie.

1.1.1a. Pour toute structure préhilbertienne σ -permise, ω_x est un état pur.

ω_x est un état, car $\|\omega\| = \omega(\delta_0) = 1$ (voir ([3], 1.3.6, 2.1.1, 2.1.4)) ; c'est une forme pure car la représentation de Fock est irréductible.

Ce résultat peut être démontré en utilisant le fait que pour tout $E_x \in \mathcal{S}$, ω restreint à $\overline{M_1(E_x, \sigma)}$ est un état pur. Faisons cette démonstration dans un cas un peu plus général.

1.1.1b. Supposons que pour tout $E_x \in \mathcal{S}$, ω_x soit un état pur de $\overline{M_1(E_x, \sigma)}$ et que cette famille d'états vérifie la propriété : $E_x, E_y \in \mathcal{S}$ et $E_x \subset E_y$, impliquent pour tout $\mu_x \in M_1(E_x, \sigma)$, $\omega_x(\mu_x) = \omega_y(\varphi_{E_x, E_y} \mu_x)$. Alors, la forme positive ω de $\overline{M_1(H, \sigma)}$ définie par $\omega((\mu_x, E_x)) = \omega_x(\mu_x)$ sur $\mathcal{M}_1(H, \sigma)$ est un état pur.

ω est bien définie car $(\mu_x, E_x) \sim (\mu_y, E_y)$ implique qu'il existe $E_z \supset E_x \cup E_y$ tel que $\varphi_{E_x, E_z} \mu_x = \varphi_{E_y, E_z} \mu_y$. Donc

$$\omega(\widehat{(\mu_x, E_x)}) = \omega_x(\mu_x) = \omega_y(\varphi_{E_x, E_z} \mu_x) = \omega_y(\varphi_{E_y, E_z} \mu_y) = \omega_y(\mu_y) = \omega(\widehat{(\mu_y, E_y)}).$$

ω est continue sur $\mathcal{M}_1(H, \sigma)$ car $|\omega(\widehat{(\mu_x, E_x)})| = |\omega_x(\mu_x)| \leq \|\mu_x\| = \|\widehat{(\mu_x, E_x)}\|$,

donc peut-être étendue à $\overline{M_1(H, \sigma)}$. Il est évident que ω , état sur $\mathcal{M}_1(H, \sigma)$, est un état de $\overline{M_1(H, \sigma)}$. Montrons que ω est pure. Supposons que f soit une forme positive sur $\overline{M_1(H, \sigma)}$ majorée par ω , c'est-à-dire, que pour tout $\mu \in \overline{M_1(H, \sigma)}$, $f(\mu^* \times \mu) \leq \omega(\mu^* \times \mu)$. Nous allons montrer qu'il existe λ , tel que $f = \lambda\omega$, avec $0 \leq \lambda \leq 1$. Soit $E_\alpha, E_\beta \in \mathcal{S}$ tels que $E_\alpha \subset E_\beta$; ceci implique $\overline{M_1(E_\alpha, \sigma)} \subset \overline{M_1(E_\beta, \sigma)}$. Pour tout $\mu_\alpha \in M_1(E_\alpha, \sigma)$,

$$f(\widehat{(\mu_\alpha, E_\alpha)^*} \times \widehat{(\mu_\alpha, E_\alpha)}) \leq \omega(\widehat{(\mu_\alpha, E_\alpha)^*} \times \widehat{(\mu_\alpha, E_\alpha)}) = \omega_\alpha(\mu_\alpha^* \times \mu_\alpha)$$

où $\widehat{(\mu_\alpha, E_\alpha)} \in \mathcal{M}_1(H, \sigma)$. L'application $f_\alpha : \mu_\alpha \rightarrow f(\widehat{(\mu_\alpha, E_\alpha)})$ est une forme positive continue de $M_1(E_\alpha, \sigma)$, qui peut être étendue à $\overline{M_1(E_\alpha, \sigma)}$, en restant majorée par ω_α . Comme ω_α est une forme pure, il existe un nombre réel λ_α tel que $f_\alpha = \lambda_\alpha \omega_\alpha$ et $0 \leq \lambda_\alpha \leq 1$. De même $f_\beta = \lambda_\beta \omega_\beta$ où $0 \leq \lambda_\beta \leq 1$. Pour un $\mu_\alpha \in M_1(E_\alpha, \sigma)$ tel que $\omega_\alpha(\mu_\alpha) \neq 0$ (on pourrait prendre δ_0), nous avons :

$$f_\beta(\varphi_{E_\beta, E_\alpha} \mu_\alpha) = f(\widehat{(\varphi_{E_\beta, E_\alpha} \mu_\alpha, E_\beta)}) = f(\widehat{(\mu_\alpha, E_\alpha)}) = f_\alpha(\mu_\alpha)$$

car $(\varphi_{E_\beta, E_\alpha} \mu_\alpha, E_\beta) \sim (\mu_\alpha, E_\alpha)$. D'où nous tirons que $\lambda_\beta \omega_\beta(\varphi_{E_\beta, E_\alpha} \mu_\alpha) = \lambda_\alpha \omega_\alpha(\mu_\alpha)$ ce qui implique $\lambda_\beta = \lambda_\alpha$. Soient maintenant E_α et E_β deux éléments quelconques de \mathcal{S} . Nous savons qu'il existe $E_\gamma \in \mathcal{S}$ tel que $E_\alpha \cup E_\beta \subset E_\gamma$. D'après ce qui précède $\lambda_\alpha = \lambda_\gamma$ et $\lambda_\beta = \lambda_\gamma$. D'où $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = \lambda$ et $f = \lambda\omega$ sur $\mathcal{M}_1(H, \sigma)$. Cette égalité s'étend à $\overline{M_1(H, \sigma)}$ par continuité.

1.1.2. Supposons que J et J' soient deux opérateurs de H définissant deux structures préhilbertiennes σ -permises et que s et s' soient les parties réelles des formes hermitiennes correspondantes. Alors $\omega_s = \omega_{s'}$ si et seulement si $J = J'$.

$$\omega_s = \omega_{s'} \Leftrightarrow \Omega_s = \Omega_{s'} \text{ car pour tout } \widehat{(\mu_\alpha, E_\alpha)} \in \mathcal{M}_1(H, \sigma),$$

$$\omega_s(\widehat{(\mu_\alpha, E_\alpha)}) = \omega_{s'}(\widehat{(\mu_\alpha, E_\alpha)})$$

si et seulement si $\mu_\alpha(\Omega_s | E_\alpha) = \mu_\alpha(\Omega_{s'} | E_\alpha)$. Comme $M_1(E_\alpha, \sigma)$ sépare $\mathcal{C}_0(E_\alpha)$, nous avons $\Omega_s | E_\alpha = \Omega_{s'} | E_\alpha$, E_α étant quelconque dans \mathcal{S} et \mathcal{S} étant absorbant pour H , nous avons $\Omega_s = \Omega_{s'}$. La démonstration en sens inverse est évidente.

$\Omega_s = \Omega_{s'} \Leftrightarrow s = s'$ car l'exponentielle est une fonction injective et $s(\psi, \psi) = s'(\psi, \psi)$ pour tout $\psi \in H$, si et seulement si $s = s'$.

$s = s' \Leftrightarrow J = J'$ du fait que σ est régulière.

1.2. Étude de $\pi_s(\delta_\psi)$.

Notons N_{ω_s} , l'idéal à gauche formé des $\mu \in \overline{M_1(H, \sigma)}$ tels que $\omega_s(\mu^* \times \mu) = 0$ et par $I_{\Omega'_s}$ l'espace vectoriel $M_1(H, \sigma)/N_{\omega_s}$. Nous savons que ω_s , par passage au quotient, définit sur $I_{\Omega'_s}$ une structure préhilbertienne. D'après ([3], 2.8.5) et 1.1.1, $I_{\Omega'_s}$ est un espace de Hilbert. Les éléments de $I_{\Omega'_s}$ seront notés $\hat{\mu}$ où $\mu \in \overline{M_1(H, \sigma)}$.

1.2.1. L'ensemble $A = \{\hat{\delta}_\psi \mid \psi \in H\}$ est total dans $I_{\Omega'_s}$.

Il suffit de montrer que A est dense dans $M_1(H, \sigma)/N_{\omega_s}$, c'est-à-dire que le sous-espace de $M_1(H, \sigma)/N_{\omega_s}$ orthogonal à A se réduit à $\{0\}$: soient $\mu \in M_1(H, \sigma)$, tel que $\omega(\hat{\delta}_\psi^* \times \hat{\mu}) = 0$, pour tout $\psi \in H$ et (μ_x, E_x) un élément de μ tel que $\psi \in E_x$. Nous avons,

$$\begin{aligned} \omega(\hat{\delta}_{-\psi} \times \hat{\mu}) &= \omega(\delta_{-\psi} \times \mu) = \omega_s(\delta_{-\psi} \times \mu_x) \\ &= (\delta_{-\psi} \times \mu_x)(\Omega' \mid E_x) = (\mu_x \times (\check{\Omega}' \mid E_x))(\psi) = 0, \end{aligned}$$

pour tout $\psi \in E_x$, ce qui implique

$$(\mu_x^* \times \mu_x \times (\check{\Omega}' \mid E_x))(0) = (\mu_x^* \times \mu_x)(\Omega' \mid E_x) = \omega_s(\mu_x^* \times \mu_x) = \omega(\mu^* \times \mu) = 0 ;$$

d'où $\mu \in N_{\omega_s}$, c'est-à-dire $\hat{\mu} = 0$.

1.2.2. Pour toute structure préhilbertienne σ -permise, $\pi_s(\delta_\psi)$ est fortement continue en ψ .

Nous savons que pour tout $\mu \in \overline{M_1(H, \sigma)}$, il existe

$$v = \sum_{l=1}^n c_l \delta_{\psi_l} \quad \text{tel que} \quad \|\hat{\mu} - \hat{v}\| \leq \varepsilon/4 ;$$

alors

$$\begin{aligned} \|\pi(\delta_\psi) - \pi(\delta_{\psi_0})\hat{\mu}\| &= \| [e^{i\sigma(\psi_0, \psi)} \pi(\delta_{\psi - \psi_0}) - \pi(\delta_0)] \hat{\mu} \| \\ &\leq \| [\pi(\delta_{\psi - \psi_0}) - \pi(\delta_0)] \hat{\mu} \| + |1 - e^{i\sigma(\psi_0, \psi)}| \|\hat{\mu}\| \leq 2 \|\hat{\mu} - \hat{v}\| \\ &\quad + \| [\pi(\delta_{\psi - \psi_0}) - \pi(\delta_0)] \hat{v} \| + |1 - e^{i\sigma(\psi_0, \psi)}| \|\hat{\mu}\|. \end{aligned}$$

D'une part, σ étant continue en ψ , il existe un voisinage V_1 de ψ_0 , tel que $\psi \in V_1$ implique $|1 - e^{i\sigma(\psi_0, \psi)}| < \varepsilon/4 \|\hat{\mu}\|$. D'autre part, en posant $\psi' = \psi - \psi_0$,

$$\begin{aligned} \|\pi(\delta_{\psi'}) - \pi(\delta_0)\hat{v}\| &= \omega(v^* \times [\delta_{-\psi'} - \delta_0] \times [\delta_{\psi'} - \delta_0] \times v) \\ &\leq 2 |\omega(v^* \times v) - \omega(v^* \times \delta_{\psi'} \times v)|. \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} \omega(v^* \times \delta_{\psi'} \times v) &= \sum_{i,j=1}^n c_i \bar{c}_j \omega(\delta_{-\psi_j} \times \delta_{\psi'} \times \delta_{\psi_i}) \\ &= \sum_{i,j=1}^n c_i \bar{c}_j e^{i\sigma(\psi_j, \psi_i)} e^{i\sigma(\psi_i + \psi_j, \psi')} \Omega'(\psi' - \psi_j + \psi_i) \end{aligned}$$

est bien continue en ψ' , il existe un voisinage V_2 de ψ_0 , tel que $\psi \in V_2$ implique $\|\pi(\delta_{\psi'}) - \pi(\delta_{\psi_0})\| \leq \varepsilon/4$. D'où, $\psi \in V_1 \cap V_2$ implique

$$\|\pi(\delta_{\psi'}) - \pi(\delta_{\psi_0})\| \leq \varepsilon.$$

1.2.3. Pour toute structure préhilbertienne σ -permise de (H, σ) et pour tout $\psi \in \bar{H}$ (complétion de H pour la norme $\|\psi\|^2 = s(\psi, \psi)$),

$$\pi(\delta_{\psi}) \in \pi(\mathcal{M}_1(H, \sigma))'' \subset \mathcal{L}(I_{\Omega}).$$

Cette proposition est une conséquence immédiate de 1.2.2.

Soient $E_x \in \mathcal{S}$, $(e_i, f_i)_{i=1, \dots, n}$ une base symplectique de E_x et

$$E_x^{\perp} = \{\psi \in H \mid \forall \varphi \in E_x, \sigma(\psi, \varphi) = 0\}.$$

E_x étant régulier, E_x^{\perp} l'est aussi. L'application

$$\mu_x \in \mathcal{M}_1(E_x, \sigma) \rightarrow \widehat{(\mu_x, E_x)} \in \mathcal{M}_1(E_x, \sigma)$$

est un isomorphisme isométrique ; nous identifierons donc les deux espaces.

Notons I_x l'espace $\overline{\mathcal{M}_1(E_x, \sigma)}/N_{\sigma}$ et I_x^{\perp} l'espace $\overline{\mathcal{M}_1(E_x^{\perp}, \sigma)}/N_{\sigma}$ qui contiennent respectivement $A_x = \{\delta_{\psi} \mid \psi \in E_x\}$ et $A_x^{\perp} = \{\delta_{\psi} \mid \psi \in E_x^{\perp}\}$.

1.2.4. $I_x \times I_x^{\perp}$ est dense dans I_{Ω} .

Tout vecteur de H se met sous la forme unique $\psi = \psi_1 + \psi_2$ où

$$\psi_1 = \sum_{i=1}^n \sigma(\psi, f_i) e_i = \sum_{i=1}^n \sigma(\psi, e_i) f_i \in E_x \quad \text{et} \quad \psi_2 = \psi - \psi_1 \in E_x^{\perp}.$$

Ce qui implique $\delta_{\psi} = \delta_{\psi_1} \times \delta_{\psi_2}$ et $A = A_x \times A_x^{\perp} \subset I_x \times I_x^{\perp} \subset I_{\Omega}$. 1.2.1, montre que $I_x \times I_x^{\perp} = I_{\Omega}$.

Il est facile de vérifier sur $\mathcal{M}_1(E_x, \sigma)$ et $\mathcal{M}_1(E_x^{\perp}, \sigma)$ que les éléments de $\overline{\mathcal{M}_1(E_x, \sigma)}$ commutent avec ceux de $\overline{\mathcal{M}_1(E_x^{\perp}, \sigma)}$.

2. — AUTOMORPHISMES DE $\overline{M_1(H, \sigma)}$,
INDUITS PAR LES OPÉRATEURS SYMPLECTIQUES
DE (H, σ)

2.1. Automorphismes et représentations d'une C^* -algèbre.

Soit \mathcal{A} une C^* -algèbre, $\alpha(\mathcal{A})$ le groupe des automorphismes de \mathcal{A} . Pour tout $T \in \alpha(\mathcal{A})$ et pour tout $x \in \mathcal{A}$, nous écrirons x^T et $x^{T^{-1}}$ au lieu de $T(x)$ et $T^{-1}(x)$ respectivement. Si de plus, f est une forme positive de \mathcal{A} et π une représentation de \mathcal{A} dans H , nous poserons, $f^T(x) = f(x^{T^{-1}})$ et $\pi^T(x) = \pi(x^{T^{-1}})$. Évidemment, f est une forme positive (resp. pure, état) si et seulement si f^T est une forme positive (resp. pure, état) et π est cyclique (resp. irréductible) si et seulement si π^T est cyclique (resp. irréductible). Nous dirons que T est implémentable pour π , si π et π^T sont unitairement équivalents. Notons $\alpha_\pi(\mathcal{A})$ le groupe des automorphismes de \mathcal{A} implémentables pour π .

2.1.1. Soit π une représentation cyclique admettant ξ pour vecteur cyclique et f la forme associée à π et ξ . Si $T \in \alpha(\mathcal{A})$ est tel que $f = f^T$, alors, $T \in \alpha_\pi(\mathcal{A})$.

Cette proposition est un cas particulier de ([3], 2.4.1).

2.1.2. Si f est un état pur et π la représentation définie par f (voir [3], 2.4.5), alors, $T \in \alpha_\pi(\mathcal{A})$ si et seulement s'il existe un élément unitaire u de $\tilde{\mathcal{A}}$ ($\tilde{\mathcal{A}}$ étant la C^* -algèbre déduite de \mathcal{A} par adjonction d'un élément unité), tel que $f^T(x) = f(u^*xu)$ pour tout $x \in \mathcal{A}$.

Cette proposition est un cas particulier de ([3], 2.8.6). 2.1.1. et 2.1.2. permettent de voir sur les formes associées, si un automorphisme est implémentable pour une représentation donnée. Nous les utiliserons dans la suite.

2.2. Opérateurs symplectiques.

H étant un espace vectoriel réel, σ une forme symplectique, nous dirons d'un opérateur linéaire T dans H , qu'il est symplectique, si et seulement si T est surjectif et $\sigma(T\psi, T\varphi) = \sigma(\psi, \varphi)$ pour tout $\psi, \varphi \in H$. Notons $S(H, \sigma)$ l'ensemble des opérateurs symplectiques.

On voit aisément que pour tout $T \in S(H, \sigma)$, T est régulier et $T^{-1} \in S(H, \sigma)$. Comme l'identité I est un opérateur symplectique, $S(H, \sigma)$ est un groupe

multiplicatif. Si E est un sous-espace vectoriel de H , T un élément de $S(H, \sigma)$, alors E est régulier si et seulement si TE est régulier. Ceci implique que les éléments de $S(H, \sigma)$ laissent \mathcal{S} invariant. Nous savons en outre que tout opérateur linéaire T restreint aux éléments de \mathcal{S} , ceci pour toute structure préhilbertienne σ -permise, est continu puisqu'il agit sur un espace vectoriel normé de dimension finie.

2.2.1. Pour tout $E \in \mathcal{S}$, pour tout $T \in S(H, \sigma)$, l'application

$$f \rightarrow f^T = f \circ T^{-1}$$

est un isomorphisme de l'espace de Banach $\mathcal{C}_0(E)$ sur l'espace de Banach $\mathcal{C}_0(TE)$.

Si $f \in \mathcal{C}_0(E)$ il est clair que f^T est définie et continue sur TE . f^T s'annule à l'infini car si $|f(\psi)| < \varepsilon$ en dehors d'un compact $Q \subset E$, $|f^T(\psi)| < \varepsilon$ en dehors du compact $TQ \subset TE$. Donc $f^T \in \mathcal{C}_0(TE)$. Les propriétés

$$\|f\| = \|f^T\|, \quad (f^*)^T = (f^T)^*, \quad (f \cdot g)^T = f^T \cdot g^T$$

et $(\alpha f + \beta g)^T = \alpha f^T + \beta g^T$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et pour tout $f, g \in \mathcal{C}_0(E)$ sont évidentes. L'application $f \rightarrow f^T$ est bijective car elle admet pour fonction inverse $f \rightarrow f^{T^{-1}}$.

2.2.2. Pour $T \in S(H, \sigma)$, l'application $\tau_T : \mu \rightarrow \mu^T$ ou $\mu^T(f) = \mu(f^{T^{-1}})$ pour tout $f \in \mathcal{C}_0(E)$ est un isomorphisme de $M_1(E, \sigma)$ sur $M_1(TE, \sigma)$ qui peut s'étendre en un isomorphisme de la C*-algèbre $\overline{M_1(E, \sigma)}$ sur la C*-algèbre $\overline{M_1(TE, \sigma)}$. De plus $(\delta_\psi)^T = \delta_{T\psi}$ pour tout $\psi \in E$.

En utilisant 2.2.1. cette proposition est immédiate.

([3], 1.3.7 et 1.8.1) impliquent $\|\mu^T\| = \|\mu\|$ pour tout $\mu \in \overline{M_1(E, \sigma)}$ et pour tout $T \in S(H, \sigma)$.

2.3. Automorphismes de $\overline{M_1(H, \sigma)}$, induits par les éléments de $S(H, \sigma)$.

2.3.1. Soit T un élément de $S(H, \sigma)$; pour tout $E_\alpha, E_\beta \in \mathcal{S}$ tel que $E_\alpha \subset E_\beta$ et pour tout $\mu_\alpha \in M_1(E_\alpha, \sigma)$ nous avons,

$$(\varphi_{E_\beta, E_\alpha} \mu_\alpha)^T = \varphi_{TE_\beta, TE_\alpha} \mu_\alpha^T.$$

Pour tout $f^T \in \mathcal{C}_0(TE_\beta)$,

$$(\varphi_{E_\beta, E_\alpha} \mu_\alpha)^T(f^T) = \mu_\alpha(f|E_\alpha), \quad (\varphi_{TE_\beta, TE_\alpha} \mu_\alpha^T)(f^T) = \mu_\alpha^T(f^T|TE_\alpha)$$

et la proposition se déduit de l'égalité $(f^T|TE_\alpha)^T = f|E_\alpha$.

2.3.2. Soit T un élément de $S(H, \sigma)$; $(\mu_x, E_x) \sim (\mu_\beta, E_\beta)$ si et seulement si $(\mu_x^T, TE_x) \sim (\mu_\beta^T, TE_\beta)$.

$(\mu_x, E_x) \sim (\mu_\beta, E_\beta)$ si et seulement s'il existe $E_\gamma \in \mathcal{S}$ tel que $E_x \cup E_\beta \subset E_\gamma$ et $\varphi_{E_\gamma, E_x} \mu_x = \varphi_{E_\gamma, E_\beta} \mu_\beta$. D'après 2.3.1 cette égalité a lieu si et seulement si $\varphi_{TE_\gamma, TE_x} \mu_x^T = \varphi_{TE_\gamma, TE_\beta} \mu_\beta^T$, c'est-à-dire $(\mu_x^T, TE_x) \sim (\mu_\beta^T, TE_\beta)$.

Cette dernière proposition donne un sens à la définition suivante :

pour tout $(\widehat{\mu_x, E_x}) \in \mathcal{M}_1(H, \sigma)$ et $T \in S(H, \sigma)$, $(\widehat{\mu_x, E_x})^T = (\widehat{\mu_x^T, TE_x})$. ([I], 83) et la remarque qui suit 2.2.2, montrent que pour tout $\mu \in \mathcal{M}_1(H, \sigma)$ et $T \in S(H, \sigma)$, $\|\mu^T\| = \|\mu\|$. Nous avons donc un automorphisme de $\mathcal{M}_1(H, \sigma)$ qui peut être étendu à $\overline{M_1(H, \sigma)}$.

2.3.3. L'application $\tau : T \in S(H, \sigma) \rightarrow \tau_T \in \alpha(\overline{M_1(H, \sigma)})$ est un monomorphisme.

Vérifions sur $\mathcal{M}_1(H, \sigma)$, que $\tau_{TT} = \tau_T \tau_T$. Par continuité, cette égalité s'étendra à $\overline{M_1(H, \sigma)}$. Pour tout

$$(\widehat{\mu_x, E_x}) \in \mathcal{M}_1(H, \sigma), \quad (\widehat{\mu_x, E_x})^{TT} = (\widehat{\mu_x^{TT}, TT E_x})$$

et

$$((\widehat{\mu_x, E_x})^T)^T = (\widehat{\mu_x^T, T E_x})^T = ((\widehat{\mu_x^T})^T, TT E_x).$$

Or pour tout $f \in \mathcal{C}_0(TT E_x)$, $(f^{T^{-1}})^{T^{-1}} = f^{T^{-1}T^{-1}}$; d'où $\mu_x^{TT} = (\mu_x^T)^T$, ce qui prouve que $\tau_{TT} = \tau_T \tau_T$. Montrons que τ est injectif : supposons que $\tau_T = \tau_{T'}$, ceci implique pour tout $(\widehat{\mu_x, E_x}) \in \mathcal{M}_1(H, \sigma)$,

$$(\mu_x^T, TE_x) \sim (\mu_x^T, T'E_x).$$

Ainsi pour tout $E_\gamma \in \mathcal{S}$ vérifiant $TE_x \cup T'E_x \subset E_\gamma$, et pour tout $f \in \mathcal{C}_0(E_\gamma)$, nous avons $\mu_x^T(f | TE_x) = \mu_x^T(f | T'E_x)$; d'où, $\mu_x(f^{T^{-1}} | E_x) = \mu_x(f^{T'^{-1}} | E_x)$, pour tout $\mu_x \in M_1(E_x, \sigma)$. Comme $M_1(E_x, \sigma)$ sépare $\mathcal{C}_0(E_x)$, nous avons : pour tout $\psi \in E_x$, $f(T\psi) = f(T'\psi)$. Cette égalité est vraie pour tout $f \in \mathcal{C}_0(E_\gamma)$ et $\mathcal{C}_0(E_\gamma)$ sépare E_γ , donc $T\psi = T'\psi$ pour tout $\psi \in E_x$. Or E_x est un élément quelconque de \mathcal{S} , lequel est absorbant pour H . Donc $T = T'$.

Nous pouvons donc considérer $S(H, \sigma)$, comme un sous-groupe de $\alpha(\overline{M_1(H, \sigma)})$; c'est ce que nous ferons par la suite.

2.4. Étude de $\alpha_x(\overline{M_1(H, \sigma)})$.

Supposons que J soit un opérateur de H , définissant une structure préhilbertienne σ -permise. Soit s la partie réelle de la forme hermitienne

correspondante. Pour tout $T \in S(H, \sigma)$, $J^T = T \cdot J \cdot T^{-1}$ définit une structure préhilbertienne σ -permise et la partie réelle de la forme hermitienne correspondante est $s^T(\psi, \varphi) = -\sigma(J^T\psi, \varphi) = s(T^{-1}\psi, T^{-1}\varphi)$. Soit π_s la représentation attachée à ω_s . Évidemment, π_s^T est la représentation attachée à ω_s^T .

$$2.4.1. \quad \omega_s^T = \omega_{s^T}$$

Cette proposition se vérifie aisément sur $\mathcal{M}_1(H, \sigma)$.

Notons $S_\pi(H, \sigma) = S(H, \sigma) \cap \alpha_\pi(\overline{M_1(H, \sigma)})$. D'après 2.1.2, nous savons que $T \in S_\pi(H, \sigma)$, si et seulement s'il existe un unitaire u de $\overline{M_1(H, \sigma)}$ tel que pour tout $\mu \in \overline{M_1(H, \sigma)}$, $\omega_{s^T}(\mu) = \omega_s(u^* \times \mu \times u)$. Un cas très important que nous rencontrerons dans la suite, est celui où $\omega_s = \omega_{s^T}$, ce qui implique $T \in S_\pi(H, \sigma)$. À l'aide de 1.1.2 on voit aisément que.

2.4.2. Pour tout $T \in S(H, \sigma)$, $\omega_s = \omega_{s^T}$ si et seulement si T commute avec J .

Donc $S^J(H, \sigma) = \{T \in S(H, \sigma) \mid [T, J]_- = 0\}$ est un sous-groupe de $S_\pi(H, \sigma)$. C'est le groupe des opérateurs unitaires (pour la structure préhilbertienne définie par J) de H .

Pour tout élément $E_x \in \mathcal{S}$ nous pouvons considérer $S(E_x, \sigma)$ comme un sous-ensemble de $S(H, \sigma)$ car l'application $T \in S(E_x, \sigma) \rightarrow \hat{T} \in S(H, \sigma)$ où $\hat{T}|_{E_x^\perp} = T$ et $\hat{T}|_{E_x} = 1$ est un monomorphisme.

2.4.3. Pour tout $E_x \in \mathcal{S}$, pour toute structure préhilbertienne σ -permise, $S(E_x, \sigma) \subset S_\pi(H, \sigma)$.

D'après la définition de la C*-algèbre $\overline{M_1(E, \sigma)}$ dans [1], nous voyons que dans la restriction à $\overline{M_1(E_x, \sigma)}$, π_{s^T} et π_s sont unitairement équivalents. Comme $\omega_s^T = \omega_{s^T}$, π_s^T et π_{s^T} sont unitairement équivalents (voir ([3], 2.8.6)), d'où π_s^T est unitairement équivalent à π_s et il existe un unitaire $u \in \overline{M_1(E_x, \sigma)}$ tel que pour tout $\mu \in \overline{M_1(E_x, \sigma)}$ on ait $\omega_s^T(\mu) = \omega_s(u^* \times \mu \times u)$. Cette dernière égalité reste vraie pour les éléments de $\overline{M_1(E_x^\perp, \sigma)}$ puisque $\hat{T}|_{E_x^\perp} = 1$ et puisque $[\mu, u]_- = 0$ (voir la remarque qui suit 1.2.4). De plus $\omega(\mu) = \omega(\hat{\mu})$ par définition ; donc seule intervient la classe de μ . En utilisant 1.2.4 nous voyons donc que pour tout $\mu \in \overline{M_1(H, \sigma)}$, $\omega_s^T(\mu) = \omega_s(u^* \times \mu \times u)$. D'où $\hat{T} \in S_\pi(H, \sigma)$.

$$2.4.4. \quad S^J(H, \sigma) \neq S_\pi(H, \sigma).$$

Soient $E_x \in \mathcal{S}$ avec $\dim E_x = 4$, $(e_i, f_i)_{i=1,2}$ une base symplectique de E_x

vérifiant $Je_i = f_i$ (on construit aisément un tel espace). Soit T un opérateur linéaire de E_2 vérifiant

$$Te_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}e_1 + \frac{1}{2}e_2, \quad Te_2 = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}e_2,$$

$$Tf_1 = \frac{4\sqrt{3}}{7}f_1 + \frac{6}{7}f_2 \quad \text{et} \quad Tf_2 = -\frac{6}{7}f_1 + \frac{4\sqrt{3}}{7}f_2.$$

On voit aisément que $T \in S(E_2, \sigma)$ donc $\hat{T} \in S_n(H, \sigma)$. De plus, il est évident que $[\hat{T}, J]_- \neq 0$.

2.5. Représentation de Fock « invariante de Lorentz » et \mathcal{L}^\dagger .

Plaçons-nous dans le cas où $H = K_m^+$ et où

$$\sigma(\varphi, \psi) = \mathcal{I} \left\{ \int \varphi_{\mathbb{F}(\bar{k})}^* \psi_{\mathbb{F}(\bar{k})} d\Omega_m(\bar{k}) \right\}$$

(voir [2], chap. IV et V). Si $\Lambda \in \mathcal{L}^\dagger$, T_Λ défini par $T_\Lambda(\varphi) = \varphi \circ \Lambda^{-1}$ est un élément de $S(K_m^+, \sigma)$. La multiplication par i , définit sur K_m^+ une structure hilbertienne σ -permise. Évidemment $T_\Lambda \in S(K_m^+, \sigma)$, ce qui implique $s^{T_\Lambda} = s$ où

$$s(\varphi, \psi) = \mathcal{R} \left\{ \int \varphi_{\mathbb{F}(\bar{k})}^* \psi_{\mathbb{F}(\bar{k})} d\Omega_m(\bar{k}) \right\}.$$

Par conséquent, les éléments de \mathcal{L}^\dagger sont implémentables pour la représentation de Fock π_s .

3. — ANTIAUTOMORPHISMES DE $\overline{M_1(H, \sigma)}$ INDUITS PAR LES OPÉRATEURS ANTISYMPLECTIQUES DE (H, σ)

3.1. Antireprésentation d'une C^* -algèbre.

Soit H un espace préhilbertien. Notons \hat{H} l'espace préhilbertien obtenu de la façon suivante : les éléments de \hat{H} sont les mêmes que ceux de H , nous les distinguerons en les pointant ($\xi \in H \Leftrightarrow \hat{\xi} \in \hat{H}$) ; par définition

$\hat{\xi} + \hat{\zeta} = \widehat{\xi + \zeta}$, $\alpha \hat{\xi} = \widehat{\alpha \xi}$ et $(\hat{\xi} | \hat{\zeta}) = (\zeta | \xi)$ pour tout $\hat{\xi}, \hat{\zeta} \in \hat{H}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$. Notons \mathcal{S} l'application $\xi \rightarrow \hat{\xi}$. C'est une application isométrique, surjective, antilinéaire (antiunitaire). Évidemment $\hat{H} = H$ et la condition nécessaire et suffisante pour que H soit complet est que \hat{H} le soit.

Si \mathcal{A} est une C*-algèbre, nous dirons que π' est une antireprésentation (a -représentation) de \mathcal{A} dans H si et seulement si $\pi'(x \cdot y) = \pi'(x) \cdot \pi'(y)$, $\pi'(\alpha x + \beta y) = \bar{\alpha} \pi'(x) + \bar{\beta} \pi'(y)$ et $\pi'(x)^* = \pi'(x^*)$, pour tout $x, y \in \mathcal{A}$ et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Soit π une représentation de \mathcal{A} dans H . L'antireprésentation $\hat{\pi}$ de \mathcal{A} dans \hat{H} associée à π , est définie par $\hat{\pi}(x) = \mathcal{S} \pi(x) \mathcal{S}^{-1}$ pour tout $x \in \mathcal{A}$. L'application $\pi \rightarrow \hat{\pi}$ est de toute évidence une bijection entre l'ensemble des représentations de \mathcal{A} et l'ensemble des a -représentations de \mathcal{A} . Donc toute représentation de \mathcal{A} est antiunitairement équivalente (a -équivalente) à une a -représentation de \mathcal{A} .

On voit aisément que si f est la forme positive associée à π et $\hat{\xi} (\xi \in H)$,

$$\bar{f}(\hat{f}(x)) = \overline{f(x)}$$

est la forme positive antilinéaire

$$(\bar{f}(x^* x)) \geq 0 \quad \text{et} \quad \bar{f}(ax + by) = \bar{a} f(x) + \bar{b} f(y)$$

(a -forme positive) associée à $\hat{\pi}$ et $\hat{\xi}$, c'est-à-dire,

$$f(x) = (\xi | \pi(x) | \xi) \Leftrightarrow \bar{f}(x) = (\hat{\xi} | \hat{\pi}(x) | \hat{\xi}).$$

Par une construction analogue à celle de Gelfand-Naimark ([3], 2.4.4) (au lieu de la translation régulière à gauche on prend la translation à droite précédée de l'involution), à toute a -forme positive f' on fait correspondre une a -représentation π' qui est évidemment antiunitairement équivalente à la représentation π associée à la forme positive \bar{f}' . De là nous tirons à l'aide de ([3], 2.8.6) la proposition suivante :

3.1.1. Soient f_1 un état pur et f_2 un a -état pur (i. e. \bar{f}_2 est un état pur), d'une C*-algèbre \mathcal{A} , π_1 une représentation associée à f_1 , π_2 une a -représentation associée à f_2 , alors π_1 et π_2 sont a -équivalentes, si et seulement s'il existe un élément unitaire $u \in \mathcal{A}$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{A}$, $f_1(x) = \overline{f_2(u^* \cdot x \cdot u)}$.

3.2. Opérateurs antisymplectiques.

Dans les mêmes conditions que 2.2 nous dirons d'un opérateur linéaire dans H , qu'il est antisymplectique, si et seulement si T est surjectif et $\sigma(T\psi, T\varphi) = -\sigma(\psi, \varphi)$, pour tout $\psi, \varphi \in H$. Notons $AS(H, \sigma)$ l'ensemble des opérateurs antisymplectiques de (H, σ) .

Nous obtenons les mêmes propositions que dans 2.2 et 2.3 à condition de prendre les définitions suivantes : $f^T(\psi) = \overline{f(T^{-1}\psi)}$ et $\mu^T(f) = \overline{\mu(f^{T^{-1}})}$. Les propositions 2.3.3, 2.4.1 et 2.4.2 deviennent respectivement :

3.2.1. L'application $\tau : T \in \text{AS}(\mathbb{H}, \sigma) \rightarrow \tau_T \in a - \alpha(\overline{\mathbb{M}_1(\mathbb{H}, \sigma)})$, où $\tau_T(\mu) = \mu^T$ est une injection.

3.2.2. Pour tout $T \in \text{AS}(\mathbb{H}, \sigma)$, $\omega_s^T = \overline{\omega_s}$.

3.2.3. Pour tout $T \in \text{AS}(\mathbb{H}, \sigma)$, $\omega_s = \omega_{s\tau}$, si et seulement si $[J, T]_+ = 0$.

Donc $\text{AS}^i(\mathbb{H}, \sigma) = \{T \in \text{AS}(\mathbb{H}, \sigma) \mid [J, T]_+ = 0\}$ est un sous-ensemble de $\text{AS}_n(\mathbb{H}, \sigma)$. De 3.1.1 nous déduisons immédiatement :

3.2.4. $T \in \text{AS}_n(\mathbb{H}, \sigma)$, si et seulement s'il existe un unitaire u de $\overline{\mathbb{M}_1(\mathbb{H}, \sigma)}$ tel que $\omega(\mu) = \overline{\omega^T(u^* \times \mu \times u)}$.

3.3. Représentation de Fock

« invariante de Lorentz » et \mathcal{L}^i .

Nos notations sont celles de 2.5, toutefois pour $\Lambda \in \mathcal{L}^i$ nous prenons $[T_\Lambda(\varphi)](\psi) = (\varphi_0 \Lambda^{-1})(\psi)$. Comme $[T_\Lambda, i]_+ = 0$, 3.2.3 montre que pour tout $\Lambda \in \mathcal{L}^i$, $T_\Lambda \in \text{AS}^i(\mathbb{K}_m^+, \sigma)$, c'est-à-dire que les éléments de \mathcal{L}^i sont implémentables pour la représentation de Fock induite par i .

4. — SPIN ISOTOPIQUE

Soit (\mathbb{H}, σ) l'espace monoparticulaire des bosons scalaires neutres. Pour introduire n degrés de liberté supplémentaires (charge ou spin par exemple), nous prendrons pour espace monoparticulaire (\mathbb{H}', σ') où $\mathbb{H}' = \mathbb{H} \otimes E$, E étant un espace vectoriel réel de dimension n et

$$\sigma' \left(\sum_i \psi_i \otimes x_i, \sum_j \varphi_j \otimes y_j \right) = \sum_{i,j} \sigma(\psi_i, \varphi_j)(x_i | y_j),$$

$(x | y)$ étant un produit scalaire euclidien de E . Cette définition est cohérente car

$$\sigma' \left((\psi_1 + \psi_2) \otimes x, \sum_j \varphi_j \otimes y_j \right) = \sigma' \left(\psi_1 \otimes x + \psi_2 \otimes x, \sum_j \varphi_j \otimes y_j \right),$$

$$\sigma' \left(\psi \otimes (x_1 + x_2), \sum_j \varphi_j \otimes y_j \right) = \sigma' \left(\psi \otimes x_1 + \psi \otimes x_2, \sum_j \varphi_j \otimes y_j \right)$$

et

$$\sigma' \left((\alpha\psi) \otimes x, \sum_j \varphi_j \otimes y_j \right) = \sigma' \left(\psi \otimes (\alpha x); \sum_j \varphi_j \otimes y_j \right).$$

Il est évident que σ' est une forme symplectique régulière de H' . Soit e_1, e_2, \dots, e_m en une base orthonormale de E , $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^m$ la base duale correspondante. Les sous-espaces vectoriels $H'_i = H \otimes \{e_i\}$, $i = 1, \dots, m$, décrivent les divers degrés de liberté introduits et leurs projecteurs orthogonaux seront $P_i = I \otimes e_i e_i^*$, $i = 1, \dots, m$ respectivement.

4.1. Représentations de Fock et opérateurs de champs.

Soit J un opérateur de H induisant une structure préhilbertienne σ -permise; définissons un opérateur J' sur H' par $J' \left(\sum_i \psi_i \otimes x_i \right) = \sum_i J \psi_i \otimes x_i$.

On voit que J' définit sur H' une structure préhilbertienne σ' -permise et que $s'(\psi \otimes x, \varphi \otimes y) = -\sigma'(J'(\psi \otimes x), \varphi \otimes y) = s(\psi, \varphi) \cdot (x|y)$. Considérons la représentation de Fock $\pi_{\sigma'}$ de $\overline{M}_1(H', \sigma')$, associée à $\omega_{\sigma'}$. De même que dans ([1], chap. V), nous définissons l'opérateur de champs associé à $\pi_{\sigma'}$ par

$$B_{\sigma'}(\psi \otimes x) = -i \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\pi_{\sigma'}(\delta_{\lambda}(\psi \otimes x)) - I}{\lambda},$$

de façon que $\pi_{\sigma'}(\delta_{\psi \otimes x}) = e^{i B_{\sigma'}(\psi \otimes x)}$. Cet opérateur est identique à

$$a^+ \{(\psi \otimes x)\} + a^- \{(\psi \otimes x)\},$$

défini sur l'espace de Hilbert

$$\mathcal{S}(H') = \bigoplus_{p=0}^{\infty} S H'^{\otimes p}.$$

4.2. Automorphismes d'isospin.

Un opérateur d'isospin est un opérateur linéaire dans H' de la forme $T' = I \otimes T$ où $T \in \mathcal{L}(E, E)$. On voit que T' est symplectique si et seulement si T appartient au groupe orthogonal de E , $\mathcal{O}(E)$. Comme nous l'avons vu dans 2.3, le groupe $\{I \otimes T \mid T \in \mathcal{O}(E)\}$ induit un sous-groupe de

$\alpha(\overline{M_1(H', \sigma)})$; c'est le groupe des automorphismes d'isospin. Certains opérateurs d'isospin, de la forme

$$T_{ij} = I \otimes \left\{ e_i e^j + e_j e^i + \sum_{k \neq i, j} e_k e^k \right\},$$

qui sont les bijections entre H'_i et H'_j , ont parfois une interprétation physique importante (conjugaison de charge par exemple).

4.3. Bosons scalaires chargés.

Pour décrire les bosons scalaires chargés, il suffit de prendre $\dim E = 2$. Soit (e_1, e_2) une base orthonormée de E . $H'_1 = H \otimes \{e_1\}$ sera l'espace des particules positives, $H'_2 = H \otimes \{e_2\}$ celui des particules négatives. La conjugaison de charge est l'opérateur $C = 1 \otimes \{e_1 e^2 + e_2 e^1\}$ ($C(f \otimes e_1) = f \otimes e_2$ et $C(f \otimes e_2) = f \otimes e_1$). Soit $\Gamma = 1 \otimes \{e_1 e^1 - e_2 e^2\}$ ($\Gamma(f \otimes e_1) = f \otimes e_1$ et $\Gamma(f \otimes e_2) = -f \otimes e_2$), alors les opérateurs

$$P_1 = \frac{1 + \Gamma}{2} = 1 \otimes e_1 e^1 \quad \text{et} \quad P_2 = \frac{1 - \Gamma}{2} = 1 \otimes e_2 e^2$$

sont deux projecteurs complémentaires tels que $\text{val } P_1 = H'_1$, $\text{val } P_2 = H'_2$, $P_1(f \otimes e_1 + g \otimes e_2) = f \otimes e_1$ et $P_2(f \otimes e_1 + g \otimes e_2) = g \otimes e_2$. On remarquera de plus que, Γ et $C \in S(H', \sigma')$ que $C^2 = \Gamma^2 = 1$ et que $[\Gamma, C]_+ = 0$. Dorénavant nous écrirons pour tout $\psi \in H'$, $\psi = P_1 \psi + P_2 \psi = \psi^+ + \psi^-$. Évidemment $(C\psi)^+ = C\psi^-$ et $(C\psi)^- = C\psi^+$.

Soit maintenant $p_1 = \frac{1 + C}{2}$ et $p_2 = \frac{1 - C}{2}$; ce sont deux projecteurs complémentaires tels que

$$p_1(f \otimes e_1 + g \otimes e_2) = \frac{f + g}{2} \otimes e_1 + \frac{f + g}{2} \otimes e_2$$

et

$$p_2(f \otimes e_1 + g \otimes e_2) = \frac{f - g}{2} \otimes e_1 - \frac{f - g}{2} \otimes e_2.$$

Pour tout $\psi \in H'$, posons $\psi = p_1 \psi + p_2 \psi = \psi_+ + \psi_-$. Évidemment $(\Gamma\psi)_+ = \Gamma\psi_-$ et $(\Gamma\psi)_- = \Gamma\psi_+$. Nous aurions donc aussi bien pu prendre pour espace des particules positives $\text{val } p_1$, pour espace des particules négatives $\text{val } p_2$ et pour conjugaison de charge Γ . $\text{val } P_1$, $\text{val } P_2$, $\text{val } p_1$

et val p_2 sont réguliers, car pour tout $\psi, \psi' \in H'$, $\sigma'(X\psi, X\psi') = \sigma'(\psi, X\psi')$ où $X = P_1, P_2, p_1, p_2$; en effet, si pour tout $\psi \in H'$,

$$0 = \sigma'(X\psi, X\psi') = \sigma'(\psi, X\psi'),$$

comme σ' est régulier, nous avons $X\psi' = 0$.

Comme nous l'avons vu C et Γ sont des automorphismes d'isospin et mieux, pour toute structure préhilbertienne σ -permise de H ,

$$C \quad \text{et} \quad \Gamma \in S^J(H', \sigma').$$

4.4. Conjugaison de charge sur un espace symplectique.

Soient (H, σ) un espace symplectique et $\Gamma, C \in S(H, \sigma)$ tels que $C^2 = \Gamma^2 = 1$ et $[\Gamma, C]_+ = 0$. Posons

$$P_1 = \frac{1 + \Gamma}{2}, \quad P_2 = \frac{1 - \Gamma}{2}, \quad p_1 = \frac{1 + C}{2}, \quad p_2 = \frac{1 - C}{2},$$

val $P_1 = H^+$, val $P_2 = H^-$, val $p_1 = H_+$ et val $p_2 = H_-$. On vérifie comme dans 4.3, que H^+, H^-, H_+ et H_- sont des sous-espaces vectoriels réguliers de H . Comme $CP_1 = P_2C$ et $\Gamma p_1 = p_2\Gamma$ on voit que C est une bijection linéaire de H^+ sur H^- et Γ une bijection linéaire de H_+ sur H_- . Pour l'interprétation physique, nous avons donc le choix suivant : soit H^+ et H^- seront les espaces positifs et négatifs respectivement avec C comme conjugaison de charge, soit H_+ et H_- seront les espaces positifs et négatifs respectivement avec Γ comme conjugaison de charge. Il est clair que H^+ est le complément orthogonal de H^- et H_+ celui de H_- .

Une représentation de Fock π , sera dite compatible avec la conjugaison de charge C , si et seulement si, $C \in S^J(H, \sigma)$.

5. — GROUPE D'AUTOMORPHISMES ASSOCIÉ A UN OPÉRATEUR HERMITIEN DE H

5.1. Généralités.

Supposons donnée une structure préhilbertienne σ -permise ; notons i l'opérateur qui définit cette structure et s la partie réelle du produit scalaire. Soit B un opérateur hermitien (pour la structure préhilbertienne définie par i) de H . Nous savons que le sous-groupe $\{e^{itB} \mid t \in \mathbb{R}\}$ du groupe

des opérateurs unitaires $S^1(\mathbb{H}, \sigma)$ induit un sous-groupe $\{\tau_{e^{itB}} \mid t \in \mathbb{R}\}$ de $\alpha_{\sigma}(\overline{M_1(\mathbb{H}, \sigma)})$ (2.4.2).

5.1.1. Il existe une représentation unitaire continue U de \mathbb{R} telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on ait :

$$\pi_s(\tau_{e^{itB}}(\mu)) = U(t)\pi_s(\mu)U(t)^{-1}$$

pour tout $\mu \in \overline{M_1(\mathbb{H}, \sigma)}$.

Posons par définition $U(t)\hat{\mu} = \widehat{\tau_{e^{itB}}(\mu)}$ (notations de 1.2). U est une représentation unitaire de \mathbb{R} puisque d'une part

$$\begin{aligned} (U(t)\hat{\mu} \mid U(t)\hat{\nu}) &= \omega_s(\tau_{e^{itB}}(\mu)^* \times \tau_{e^{itB}}(\nu)) \\ &= \omega_s(\tau_{e^{itB}}(\mu^* \times \nu)) = \omega_s(\mu^* \times \nu) = (\hat{\mu} \mid \hat{\nu}) \quad (2.4.2), \end{aligned}$$

$$U(t)U(t')\hat{\mu} = U(t)\widehat{\tau_{e^{it'B}}(\mu)} = \widehat{\tau_{e^{i(t+t')B}}(\mu)} = U(t+t')\hat{\mu}$$

et d'autre part, l'image canonique de $\overline{M_1(\mathbb{H}, \sigma)}$ est partout dense dans l'espace de représentation. La continuité de U résulte de 1.2.1 et du fait que pour tout

$$\hat{\mu} = \sum_{k=1}^n a_k \hat{\delta}_{\psi_k} \quad \text{et} \quad \hat{\nu} = \sum_{j=1}^m b_j \hat{\delta}_{\varphi_j}$$

l'application

$$t \rightarrow (\hat{\mu} \mid U(t)\hat{\nu}) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \overline{a_k} b_j e^{i\sigma(\psi_k, e^{itB}\varphi_j)} \Omega_s(e^{itB}\varphi_j - \psi_k)$$

est continue. Enfin pour tout μ et $\nu \in \overline{M_1(\mathbb{H}, \sigma)}$,

$$\pi_s(\tau_{e^{itB}}(\mu))\hat{\nu} = \widehat{\tau_{e^{itB}}(\mu) \times \nu} = \widehat{\tau_{e^{itB}}(\mu \times \tau_{e^{-itB}}(\nu))} = U(t)\pi_s(\mu)U(t)^* \hat{\nu}.$$

Le théorème de Stone ([6]) implique $U(t) = e^{itC}$ où C est un opérateur hermitien de I_{Ω_s} ; nous l'appellerons, « opérateur infinitésimal associé à B ». Il est clair que $\hat{\delta}_0$ (vecteur « vide ») est un vecteur propre de C à valeur propre 0 puisque $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(t) - 1}{t} \hat{\delta}_0 = 0$.

Nous notons A l'opérateur de champ (i. e. $\pi_s(\delta_\psi) = e^{iA(\psi)}$), alors nous avons

$$5.1.2. \quad [C, A(\psi)]_- \subseteq -iA(iB\psi).$$

La proposition 5.1.1 implique :

$$\pi_s(\tau_{e^{itB}}(\delta_\psi)) = e^{iA(e^{itB}\psi)} = e^{itC} e^{iA(\psi)} e^{-itC}.$$

D'une part

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{iA(e^{itB}\psi)} - e^{iA(\psi)}}{t} = ie^{iA(\psi)}A(iB\psi) \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{e^{iA(\lambda\psi)}A(i\lambda B\psi)}{\lambda} = A(iB\psi),$$

d'autre part

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(t)\pi_2(\delta_\psi)U(t)^* - \pi_2(\delta_\psi)}{t} = i[C, e^{iA(\psi)}]_- \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{[C, e^{iA(\lambda\psi)}]_-}{\lambda} = i[C, A(\psi)]_-$$

ce qui établit la proposition.

Posons

$$a^+(\psi) = \frac{1}{2} \{ A(\psi) - iA(i\psi) \} \quad \text{et} \quad a^-(\psi) = \frac{1}{2} \{ A(\psi) + iA(i\psi) \}.$$

Nous savons que $a^+(\psi)$ et $a^-(\psi)$ sont respectivement le créateur et l'annihilateur d'une particule dans l'état ψ . On peut montrer par un calcul direct que $a^-(\psi)\delta_0 = 0$ et que $(a^+(\psi)\delta_0 | a^+(\varphi)\delta_0) = (\psi | \varphi)$. On vérifie aisément que a^+ est linéaire, a^- antilinéaire et $[C, A(\psi)]_- \subseteq a^+(B\psi) - a^-(B\psi)$.

5.2. Opérateur « nombre de particules ».

Supposons que $B = 1$. Le groupe $\{ e^{it} | t \in \mathbb{R} \}$ est appelé « groupe de jauge de 1^{re} espèce ». L'opérateur infinitésimal associé à B et noté N s'appelle « opérateur nombre de particules ». Il est immédiat que

$$[N, a^-(\psi)]_- \subseteq -a^-(\psi) \quad \text{et} \quad [N, a^+(\psi)]_- \subseteq a^+(\psi).$$

Si V est un sous-espace vectoriel complet de H et P_V le projecteur orthogonal sur V , alors l'opérateur infinitésimal N_V associé à P_V est l'opérateur « nombre de particules dans un état appartenant à V ».

Si H est un espace de Hilbert séparable et $(\psi_n)_n$ une base orthonormale complète, alors

$$N = \sum_{i=1}^{\infty} a^+(\psi_i)a^-(\psi_i)$$

(voir [7]). Cependant 5.1 prouve l'existence de N même si H n'est pas séparable.

5.3. Opérateur de « charge ».

Avec les notations 4.3, si nous posons $B = 1 \otimes \{e_1 e^1 - e_2 e^2\}$, nous trouvons que $C = N^+ - N^-$ où N^+ est l'opérateur nombre de particules positives et N^- l'opérateur nombre de particules négatives. Nous posons $N^+ - N^- = Q$.

5.4. Opérateur « impulsion-énergie ».

Supposons que $H = K_m^+$ (solutions de l'équation de Klein-Gordon à énergie positive) et que le produit scalaire soit

$$h(\psi, \varphi) = \int \psi_F(\vec{k})^* \varphi_F(\vec{k}) d\Omega_m(\vec{k})$$

(voir [2], chap. IV et V). Les quatre opérateurs infinitésimaux \mathcal{H}^μ , $\mu = 0, 1, 2$ et 3 associés respectivement aux opérateurs hermitiens $i \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ sont, l'hamiltonien (\mathcal{H}^0) et les opérateurs d'impulsion (\mathcal{H}^i , $i = 1, 2, 3$). En effet, d'après ce qui précède :

$$[\mathcal{H}^\mu, A(\psi)]_- \cong iA\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi\right).$$

6. — GROUPE DES AUTOMORPHISMES DE JAUGE DE DEUXIÈME ESPÈCE DE $\overline{M}_1(\mathbb{H}, \sigma)$

6.1. Préliminaires.

Soit H' le dual algébrique de H et U l'ensemble des nombres complexes de module un.

6.1.1. Si χ et $\chi' \in H'$ et si $e^{i\chi(x)} = e^{i\chi'(x)}$ pour tout $x \in H$, alors $\chi = \chi'$.

Supposons que $e^{i\chi(x)} = e^{i\chi'(x)}$ pour tout $x \in H$. D'après ([5], 9.5.5), $\chi(x) = \chi'(x) + 2n(x)\pi$ où n applique H dans Z , Z étant le groupe additif des entiers. Du fait que χ et χ' sont linéaires nous déduisons que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in H$, $n(\lambda x) = \lambda n(x)$, ce qui implique $n(x) = 0$.

6.1.2. Soit χ un élément de H' et f la fonction définie par $f(x) = e^{i\chi(x)}$ pour tout $x \in H$. Si H est un espace vectoriel topologique, alors, f est continue si et seulement si χ est continue.

Si χ est continue, f est continue, puisqu'elle est la composition de deux fonctions continues. Supposons que f soit continue. Pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, nous savons que $\varphi : \lambda \rightarrow e^{i\lambda}$ est un homéomorphisme de $] -\varepsilon, +\varepsilon[$ sur $\varphi[-\varepsilon, +\varepsilon] = V_\varepsilon$ puisque $V_\varepsilon \neq U$ ([5], 9.5.7). V_ε étant un voisinage de 1, $f^{-1}(V_\varepsilon) = W_\varepsilon$ est un voisinage de 0 dans H .

Nous allons montrer que χ est continue au point 0. Notons t l'application $\varphi^{-1} \circ f|_{W_\varepsilon}$. Il est clair que $f(x) = e^{i\chi(x)} = e^{i\chi(tx)}$. Pour établir la proposition il nous suffira de prouver que $\chi|_{W_\varepsilon} = t$.

Si

$$x \quad \text{et} \quad y \in W_\varepsilon$$

alors

$$e^{it(\lambda x + (1-\lambda)y)} = e^{i\chi(\lambda x + (1-\lambda)y)} = e^{i\chi(\lambda x)} e^{i\chi((1-\lambda)y)} = e^{it(\lambda x) + t((1-\lambda)y)}$$

pour

$$\lambda \in [0, 1].$$

Donc $t(\lambda x + (1-\lambda)y) = t(\lambda x) + t((1-\lambda)y) + 2k(\lambda x, (1-\lambda)y)\pi$ ([5], 9.5.5). t étant continue et W_ε connexe, l'égalité précédente prouve que le domaine de valeur de k se réduit à un seul point qui n'est autre que 0 puisque $t(0) = 0$. De là nous déduisons que pour tout entier n , et pour tout

$x \in W_\varepsilon$, $t\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{1}{n}t(x)$. De même si $x \in W_\varepsilon$ et si pour un entier m , $mx \in W_\varepsilon$

alors, $t(mx) = mt(x)$. Supposons maintenant que $x \in W_\varepsilon$ et que les deux entiers m et n sont tels que $m < n$. Alors $\frac{x}{n} \in W_\varepsilon$ et $m \cdot \frac{x}{n} \in W_\varepsilon$, d'où

$t\left(\frac{m}{n}x\right) = \frac{m}{n}t(x)$. La continuité de t prouve enfin que pour tout $x \in W_\varepsilon$

et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $t(\lambda x) = \lambda t(x)$. Revenons à l'égalité $e^{i\chi(x)} = e^{it(x)}$ pour tout $x \in W_\varepsilon$. Elle implique $\chi(x) = t(x) + 2k(x)\pi$ ([5], 9.5.5). Si $\lambda \in]0, 1[$, comme $\chi(\lambda x) = \lambda\chi(x)$ et $t(\lambda x) = \lambda t(x)$, nous avons

$$t(\lambda x) + 2k(\lambda x)\pi = t(\lambda x) + 2\lambda k(x)\pi$$

ce qui montre que $k = 0$.

Si H est l'espace monoparticulaire, A un opérateur de champ, la transformation de jauge la plus générale de A , est de la forme : $A \rightarrow A_\chi = A + \chi$ où χ est \mathbb{R} -linéaire à valeurs dans \mathbb{R} . Pour obtenir une pareille transforma-

mation, pour toute représentation de Fock, nous devons trouver un élément de $\alpha(\overline{M_1(H, \sigma)})$ qui transforme δ_ψ en $(\delta_\psi)^x = e^{ix(\psi)}\delta_\psi$, car

$$\pi((\delta_\psi)^x) = \pi(e^{ix(\psi)}\delta_\psi) = e^{i(\Lambda(\psi) + x(\psi))} = e^{i\Lambda_x(\psi)} = \pi^x(\delta_\psi),$$

ce qui justifie le paragraphe suivant.

6.2. Automorphismes de jauge.

6.2.1. Pour tout $\chi \in H'$ l'application $f \rightarrow f^x$ ou $f^x(\psi) = e^{ix(\psi)}f(\psi)$ pour tout $\psi \in H$, est un automorphisme de $\mathcal{C}_0(E)$, quel que soit $E \in \mathcal{S}$.

Cette proposition est immédiate car $\chi|E$ est continue.

D'après 2.2.1 et 2.3, l'automorphisme $f \rightarrow f^x$, induit sur $\overline{M_1(H, \sigma)}$ un automorphisme $\zeta_x : \mu \rightarrow \mu^x$. Ce dernier agit sur $\mathcal{M}_1(H, \sigma)$ de la façon suivante : pour tout $(\mu_x, E_x) \in \mathcal{M}_1(H, \sigma)$, $(\mu_x, E_x)^x = (\mu_x^x, E_x)$ où $\mu_x^x(f) = \mu_x(f^x)$ quel que soit $f \in \mathcal{C}_0(E_x)$. En particulier nous avons :

6.2.2. Pour tout $\chi \in H'$ et pour tout $\psi \in H$, $(\delta_\psi)^x = e^{ix(\psi)}\delta_\psi$.

6.2.3. H' étant considéré comme un groupe additif, l'application

$$\zeta : \chi \in H' \rightarrow \zeta_x \in \alpha(\overline{M_1(H, \sigma)})$$

est un monomorphisme.

Supposons que $\zeta_x = \zeta_{x'}$. Pour tout $(\mu_x, E_x) \in \mathcal{M}_1(H, \sigma)$, $(\mu_x^x, E_x) = (\mu_x^{x'}, E_x)$, ce qui implique $\mu_x^x = \mu_x^{x'}$, c'est-à-dire $\mu_x(f^x) = \mu_x(f^{x'})$ quel que soit $f \in \mathcal{C}_0(E_x)$. $M_1(E_x, \sigma)$ séparant $\mathcal{C}_0(E_x)$, $f^x = f^{x'}$ quel que soit $f \in \mathcal{C}_0(E_x)$. En tenant compte de 6.1.1 nous avons $\chi|E_x = \chi'|E_x$, E_x étant quelconque dans \mathcal{S} et \mathcal{S} étant absorbant pour H , nous avons $\chi = \chi'$. En outre, sur $\mathcal{M}_1(H, \sigma)$, on voit que $\zeta_{x+x'} = \zeta_x \zeta_{x'}$ car $f^{x+x'} = (f^x)^{x'} = (f^x)^{x'}$.

Le groupe additif H' sera donc considéré dans la suite, comme un sous-groupe (commutatif) du groupe des automorphismes de $\overline{M_1(H, \sigma)}$.

6.3. Automorphismes de jauge implémentables pour une représentation de Fock.

Soit π_s une représentation de Fock particulière. Nous noterons H_s^* , le sous-groupe additif de H' formé des éléments de H' continus pour la norme $\|\psi\| = \sqrt{s(\psi, \psi)}$, $\psi \in H$.

6.3.1. $H' \cap \alpha_n(\overline{M_1(H, \sigma)}) = H_s^*$.

Autrement dit, nous allons démontrer que ζ_x est implémentable pour π_x , si et seulement si, $\chi \in H_x^*$. Supposons que ζ_x soit implémentable pour π_x . D'après 1.1.1 et 2.1.2, il existe un élément unitaire u de $\overline{M}_1(\overline{H}, \sigma)$ tel que $\omega_s(u^* \times \delta_\psi \times u) = \omega_s((\delta_\psi)^x) = e^{i\chi(\psi)} \Omega'(\psi)$. D'après la remarque de 1.2.2 et d'après 6.1.2 nous voyons que $\chi \in H_x^*$. Réciproquement, supposons que $\chi \in H_x^*$. D'après le théorème de Riesz (voir [4], p. 89), il existe $\psi_0 \in \overline{H}$ tel que $\chi(\psi) = s(\psi_0, \psi)$ pour tout $\psi \in H$. Si nous posons

$$u = -\frac{1}{2} J\psi_0,$$

alors $\chi(\psi) = \sigma(2u, \psi)$ et $u \in \overline{H}$. 1.2.3 montre que $\pi(\delta_u)$ appartient à $\mathcal{L}(I_\Omega)$; donc $\pi(\delta_u)\pi(\mu)\pi(\delta_u)^*$ appartient aussi à $\mathcal{L}(I_\Omega)$. Nous allons démontrer que pour tout $\mu \in \mathcal{M}_1(H, \sigma)$, $\pi^x(\mu) = \pi(\delta_u)\pi(\mu)\pi(\delta_u)^*$. π étant continue cette égalité s'étendra à $\overline{M}_1(\overline{H}, \sigma)$. Afin de calculer l'expression $\pi(\delta_u)\pi(\mu)\pi(\delta_u)^*$ nous allons utiliser comme intermédiaire de calcul $\mathcal{M}_1(\overline{H}, \sigma)$ et $\mathcal{M}_1(\overline{H}, \sigma)/N'_\omega$ où $N'_\omega = \{ \mu \in \overline{M}_1(\overline{H}, \sigma) \mid \omega(\mu^* \times \mu) = 0 \}$. Nous savons que $\mathcal{M}_1(H, \sigma) \subset \mathcal{M}_1(\overline{H}, \sigma)$ ([1], théorème 22) et que

$$\mathcal{M}_1(H, \sigma)/N'_\omega \subset \mathcal{M}_1(\overline{H}, \sigma)/N'_\omega$$

car si

$$\begin{aligned} \bar{\mu} \in \mathcal{M}_1(H, \sigma)/N'_\omega \quad \text{et} \quad \mu \in \mathcal{M}_1(\overline{H}, \sigma)/N'_\omega \\ \|\bar{\mu}\|^2 = \omega(\bar{\mu}^* \times \bar{\mu}) = \omega(\mu^* \times \mu) = \omega(\bar{\mu}^* \times \bar{\mu}) = \|\bar{\mu}\|^2. \end{aligned}$$

Soit π' la représentation régulière gauche de $\mathcal{M}_1(\overline{H}, \sigma)$ dans $\mathcal{M}_1(\overline{H}, \sigma)/N'_\omega$ et π celle de $\mathcal{M}_1(H, \sigma)$ dans $\mathcal{M}_1(H, \sigma)/N'_\omega$. Évidemment, pour tout $\mu \in \mathcal{M}_1(H, \sigma)$, $\pi(\mu) = \pi'(\mu) \mid \mathcal{M}_1(H, \sigma)/N'_\omega$. Pour tout $(\mu_x, E_x) \in \mathcal{M}_1(H, \sigma)$,

$$\begin{aligned} \pi(\delta_u)\pi(\widehat{(\mu_x, E_x)})\pi(\delta_u)^* \mid \mathcal{M}_1(H, \sigma)/N'_\omega &= \pi'(\delta_u \times (\mu_x, E_x) \times \delta_{-u}) \mid \mathcal{M}_1(H, \sigma)/N'_\omega \\ &= \pi'(\widehat{(\delta_u \times \mu_x \times \delta_{-u}, E_x)}) \mid \mathcal{M}_1(H, \sigma)/N'_\omega = \pi(\widehat{(\mu_x^z, E_x)}) = \pi^z((\mu_x, E_x)). \end{aligned}$$

REMERCIEMENTS

J'ai le plus grand plaisir à remercier M. D. Testard pour les conversations fructueuses que nous avons eues et pour l'aide amicale qu'elles m'ont apportée. Je dois à M. le Professeur D. Kastler toute ma reconnaissance pour son constant intérêt. M. le Professeur A. Guichardet et M. J. C. Troitin ont bien voulu lire le manuscrit et me signaler quelques erreurs. Qu'ils veuillent bien trouver ici l'expression de ma gratitude.

RÉFÉRENCES

- [1] D. KASTLER, The C^* -algebras of a free boson field. I. Discussion of Basic Facts. *Commun. math. Phys.*, **1**, 1965, 14-18.
- [2] D. KASTLER, *Introduction à l'Électrodynamique Quantique*. Dunod, 1961, Paris.
- [3] J. DIXMIER, *Les C^* -algèbres et leurs représentations*. Gauthier-Villars, 1964, Paris.
- [4] M. A. NAIMARK, *Normed Rings*. Noordhoff Groningen, The Netherlands, 1959.
- [5] J. DIEUDONNÉ, *Fondements de l'analyse moderne*. Gauthier-Villars, 1963, Paris.
- [6] M. H. STONE, On one-parameter unitary groups in Hilbert space. *Ann. of Math. (2)*, vol. **33**, 1932, 643-648.
- [7] G. F. DELL'ANTONIO, S. DOPLICHER and D. RUELLE, A theorem on Canonical Commutation and Anticommutation Relations. *Commun. math. Phys.*, **2**, 1966, 223-230.

Manuscrit reçu le 25 juin 1967.