T H E S E S

présentées

A LA FACULTE DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITE D'AIX-MARSEILLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR-ès-SCIENCES PHYSIQUES

par

Jérôme MANUCEAU

Première Thèse

C^*-ALGEBRES DES RELATIONS DE COMMUTATION ET D'ANTICOMMUTATION ET LEURS ETATS QUASI-LIBRES

Deuxième Thèse

PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE

Soutenues, le 6 Mai 1968, devant la Commission d'Examen

Jury	MM. J.M. SOURIAU	Président
	H. BACRY	Examinateurs
	N. HUGENHOLTZ	
	D. KASTLER	

UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE

FACULTÉ DES SCIENCES DE MARSEILLE

PHYSIQUE THÉORIQUE

S O M M A I R E

-:-:-:-:-:-:-

Jusqu'à présent il n'a pas été possible de construire des modèles physiques dont les solutions ne soient pas des états quasi-libres. Il est donc intéressant de faire une étude systèmatique des états quasi-libres en espérant que les propriétés trouvées éclairent le problème de la construction de modèles non triviaux.

Ce travail se divise en quatre parties. La première concerne l'étude des automorphismes (resp. antiautomorphismes) de la C^*-algèbre du champ de bosons libres, induits, par les opérateurs symplectiques (resp. antisymplectiques) de l'espace monoparticulaire.

La deuxième partie décrit la C^*-algèbre des relations de commutation. On y trouvera aussi une étude de ses propriétés et de quelques uns de ses automorphismes physiquement intéressants.

L'étude des états quasi-libres des relations d'anticommutation et de commutation font respectivement l'objet des parties trois et quatres. On montre en particulier que les états quasi-libres purs sont les états de Fock et que l'on peut passer d'un état de Fock à un autre par un automorphisme monoparticulaire (transformation de Bogoliubov généralisée).

TABLE DES MATIERES

SOMMAIRE

ETUDE DE QUELQUES AUTOMORPHISMES

DE LA C*- ALGEBRE DU CHAMP DE BOSONS LIBRES

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

Soient H un espace vectoriel réel, σ une forme symplectique sur H, c'est-à-dire, une forme bilinéaire antisymétrique ($\sigma(\psi,\varphi) = -\sigma(\varphi,\psi)$ pour tout ψ et $\varphi \in H$), régulière ($\sigma(\psi,\varphi) = 0$ pour tout $\varphi \in H$, implique $\psi = 0$). La C*- algèbre du champ de bosons libres $\overline{M_1(H,\sigma)}$ a été définie et étudiée dans la référence [1]. Appelons opérateur symplectique (resp. antisymplectique) de (H,σ) tout opérateur linéaire surjectif T , vérifiant $\sigma(T\psi,T\varphi) = \sigma(\psi,\varphi)$ (resp. $\sigma(T\psi,T\varphi) = -\sigma(\psi,\varphi)$) pour tout ψ et $\varphi \in H$. Nous montrons que ces opérateurs induisent sur $\overline{M_1(H,\sigma)}$ des automorphismes (resp. antiautomorphismes) qui sont une généralisation des automorphismes (resp. antiautomorphismes) induits par le groupe de Lorentz $\mathcal{L}^{\uparrow}$ (resp. $\mathcal{L}^{\downarrow}$). Pour toute représentation de Fock, nous donnons un critère d'implémentation de ces automorphismes (resp. antiautomorphismes). Pour chaque structure préhilbertienne σ-permise, nous étudions quelques sous groupes importants du groupe des opérateurs symplectiques : groupe de jauge de 1ère espèce (d'où l'existence de l'opérateur " nombre de particules") et les groupes d'impulsion-énergie (d'où l'existence des opérateurs "impulsion- énergie"). Nous faisons en outre une étude du spin isotopique et des opérateurs d'isospin , cette étude étant appliquée ensuite au cas particulier des bosons scalaires chargés et de la conjugaison de charge. Nous définissons enfin, les automorphismes de jauge de 2ème espèce et donnons un critère d'implémentation pour une représentation de Fock quelconque.

1 - COMPLEMENTS SUR $\overline{M_1(H,\sigma)}$

-:-:-:-:-:-:-:-

1.1. Etude de la forme positive ω_s

D'après ([1], théorème 21), nous savons que $\mathcal{M}_1(H,\sigma)$ et $\overline{M_1(H,\sigma)}$ ne dépendent pas du système $\mathfrak{S}$. Nous choisirons donc comme système $\mathfrak{S}$, l'ensemble de tous les sous espaces vectoriels réguliers de H , de dimension finie.

1.1.1a. Pour toute structure préhilbertienne σ -permise, ω_s est un état pur.

ω_s est un état, car $\|\omega\| = \omega(\delta_0) = 1$ (voir ([3], 1.3.6 , 2.1.1, 2.1.4)); c'est une forme pure car la représentation de Fock est irréductible.

Ce résultat peut être démontré en utilisant le fait que pour tout $E_\alpha \in \mathfrak{S}$, ω restreint à $\overline{M_1(E_\alpha,\sigma)}$ est un état pur. Faisons cette démonstration dans un cas un peu plus général.

1.1.1b. Supposons que pour tout $E_\alpha \in \mathfrak{S}$, ω_α soit un état pur de $\overline{M_1(E_\alpha,\sigma)}$ et que cette famille d'états vérifie la propriété : E_α, $E_\gamma \in \mathfrak{S}$ et $E_\alpha \subset E_\gamma$, impliquent pour tout $\mu_\alpha \in M_1(E_\alpha, \sigma)$ $\omega_\alpha(\mu_\alpha)=\omega_\gamma(\varphi_{E_\gamma,E_\alpha}\mu_\alpha)$.
Alors, la forme positive ω de $\overline{M_1(H,\sigma)}$ définie par
$\omega((\mu_\alpha, E_\alpha)) = \omega_\alpha(\mu_\alpha)$ sur $\mathcal{M}_1(H,\sigma)$ est un état pur.

ω est bien définie car $(\mu_\alpha, E_\alpha) \sim (\mu_\beta, E_\beta)$ implique qu'il existe

$E_\gamma \supset E_\alpha \cup E_\beta$ tel que $\varphi_{E_\gamma,E_\alpha}\mu_\alpha = \varphi_{E_\gamma,E_\beta}\mu_\beta$. Donc $\omega(\widehat{(\mu_\alpha,E_\alpha)}) = \omega_\alpha(\mu_\alpha) =$ $\omega_\gamma(\varphi_{E_\gamma,E_\alpha}\mu_\alpha) = \omega_\gamma(\varphi_{E_\gamma,E_\beta}\mu_\beta) = \omega_\beta(\mu_\beta) = \omega(\widehat{(\mu_\beta,E_\beta)})$. ω est continue sur $\mathcal{M}_1(H,\sigma)$ car $|\omega(\widehat{(\mu_\alpha,E_\alpha)})| = |\omega_\alpha(\mu_\alpha)| \leq \|\mu_\alpha\| = \|\widehat{(\mu_\alpha,E_\alpha)}\|$, donc peut-être étendue à $\overline{M_1(H,\sigma)}$. Il est évident que c'est un état de $\overline{M_1(H,\sigma)}$ puisqu'elle l'est sur $\mathcal{M}_1(H,\sigma)$. Montrons que ω est pure. Supposons que f soit une forme positive sur $\overline{M_1(H,\sigma)}$ majorée par ω, c'est-à-dire, que pour tout $\mu \in \overline{M_1(H,\sigma)}$, $f(\mu^*\times\mu) \leqslant \omega(\mu^*\times\mu)$. Nous allons montrer qu'il existe λ, tel que $f = \lambda\omega$, avec $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Soient $E_\alpha, E_\beta \in \mathcal{G}$ tels que $E_\alpha \subset E_\beta$; ceci implique que $\overline{M_1(E_\alpha,\sigma)} \subset \overline{M_1(E_\beta,\sigma)}$. Pour tout $\mu_\alpha \in M_1(E_\alpha,\sigma)$, $f(\widehat{(\mu_\alpha,E_\alpha)}^* \times \widehat{(\mu_\alpha,E_\alpha)}) \leqslant \omega(\widehat{(\mu_\alpha,E_\alpha)}^* \times \widehat{(\mu_\alpha,E_\alpha)}) = \omega_\alpha(\mu_\alpha^* \times \mu_\alpha)$ où $\widehat{(\mu_\alpha,E_\alpha)} \in \mathcal{M}_1(H,\sigma)$. L'application $f_\alpha : \mu_\alpha \longrightarrow f(\widehat{(\mu_\alpha,E_\alpha)})$ est une forme positive continue de $M_1(E_\alpha,\sigma)$, qui peut être étendue à $\overline{M_1(E_\alpha,\sigma)}$, majorée par ω_α. Comme ω_α est une forme pure, il existe un nombre réel λ_α tel que $f_\alpha = \lambda_\alpha\omega_\alpha$ et $0 \leqslant \lambda_\alpha \leqslant 1$. De même on montre que $f_\beta = \lambda_\beta\omega_\beta$ où $0 \leqslant \lambda_\beta \leqslant 1$. Pour un $\mu_\alpha \in M_1(E_\alpha,\sigma)$ tel que $\omega_\alpha(\mu_\alpha) \neq 0$ (on pourrait prendre δ_0), nous avons :
$f_\beta(\varphi_{E_\beta,E_\alpha}\mu_\alpha) = f(\widehat{(\varphi_{E_\beta,E_\alpha}\mu_\alpha,E_\beta)}) = f(\widehat{(\mu_\alpha,E_\alpha)}) = f_\alpha(\mu_\alpha)$ car $(\varphi_{E_\beta,E_\alpha}\mu_\alpha,E_\beta) \sim (\mu_\alpha,E_\alpha)$
D'où nous tirons que $\lambda_\beta\,\omega_\beta(\varphi_{E_\beta,E_\alpha}\mu_\alpha) = \lambda_\alpha\,\omega_\alpha(\mu_\alpha)$ ce qui implique $\lambda_\beta = \lambda_\alpha$.
Soient maintenant E_α et E_β deux éléments quelconques de $\mathcal{G}$. Nous savons qu'il existe $E_\gamma \in \mathcal{G}$ tel que $E_\alpha \cup E_\beta \subset E_\gamma$. D'après ce qui précède $\lambda_\alpha = \lambda_\gamma$ et $\lambda_\beta = \lambda_\gamma$. D'où $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = \lambda$ et $f = \lambda\,\omega$ sur $\mathcal{M}_1(H,\sigma)$. Cette égalité s'étend à $\overline{M_1(H,\sigma)}$ par continuité.

1.1.2. Supposons que J et J' soient deux opérateurs de H définissant deux structures préhilbertiennes σ - permises et que s et s' soient les parties réelles des formes hermitiennes correspondantes. Alors $\omega_s = \omega_{s'}$ si et seulement si $J = J'$.

$\omega_s = \omega_{s'} \Longrightarrow \Omega'_s = \Omega'_{s'}$ car pour tout $\widehat{(\mu_\alpha, E_\alpha)} \in \mathcal{M}_1(H,\sigma)$, $\omega_s(\widehat{(\mu_\alpha,E_\alpha)}) = \omega_{s'}(\widehat{(\mu_\alpha,E_\alpha)})$ si et seulement si $\mu_\alpha(\Omega'_s|E_\alpha) = \mu_\alpha(\Omega'_{s'}|E_\alpha)$. Comme $M_1(E_\alpha,\sigma)$ sépare $\mathcal{C}_0(E_\alpha)$, nous avons $\Omega'_s|E_\alpha = \Omega'_{s'}|E_\alpha$. E_α étant quelconque dans $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}$ étant absorbant pour H, nous avons $\Omega'_s = \Omega'_{s'}$. La démonstration en sens inverse est évidente.

$\Omega'_s = \Omega'_{s'} \Longleftrightarrow s = s'$ car l'exponentielle est une fonction injective et $s(\psi,\psi) = s'(\psi,\psi)$ pour tout $\psi \in H$, si et seulement si $s = s'$.

$s = s' \Longleftrightarrow J = J'$ du fait que σ est régulière.

1.2. Etude de $\pi_s(\delta_\psi)$

Notons par N_{ω_s}, l'idéal à gauche formé des $\mu \in \overline{M_1(H,\sigma)}$ tels que $\omega_s(\mu^* \times \mu) = 0$ et par $I_{\Omega'_s}$ l'espace vectoriel $\overline{M_1(H,\sigma)}/_{N_{\omega_s}}$. Nous savons que ω_s par passage au quotient, définit sur $I_{\Omega'_s}$ une structure préhilbertienne. D'après ([3], 2.8.5) et 1.1.1, $I_{\Omega'_s}$ est un espace de Hilbert. Les éléments de $I_{\Omega'_s}$ seront notés $\widehat{\mu}$ où $\mu \in \overline{M_1(H,\sigma)}$.

1.2.1. L'ensemble $A = \{ \widehat{\delta_\psi} | \psi \in H \}$ est total dans $I_{\Omega'_s}$.

Il suffit de montrer que A est dense dans $\mathcal{M}_1(H,\sigma)/_{N_{\omega_s}}$, c'est-à-dire que le sous espace de $\mathcal{M}_1(H,\sigma)/N_{\omega_s}$ orthogonal à A se réduit à $\{0\}$: soient $\mu \in \mathcal{M}_1(H,\sigma)$, tel que $\omega(\widehat{\delta_\psi}^* \times \widehat{\mu}) = 0$, pour tout $\psi \in H$ et $(\imath_\alpha, E_\alpha)$ un élément de μ tel que $\psi \in E_\alpha$. Nous avons, $\omega(\widehat{\delta_{-\psi}} \times \widehat{\mu}) = \omega(\delta_{-\psi} \times \mu) =$ $\omega_\alpha(\delta_{-\psi} \times \mu_\alpha) = (\delta_{-\psi} \times \mu_\alpha)(\Omega'|E_\alpha) = (\mu_\alpha \times (\check{\Omega}'|E_\alpha))(\psi) = 0$, pour tout $\psi \in E_\alpha$, ce qui implique que $(\mu_\alpha^* \times \mu_\alpha \times (\check{\Omega}'|E_\alpha))(0) = (\mu_\alpha^* \times \mu_\alpha)(\Omega'|E_\alpha) = \omega_\alpha(\mu_\alpha^* \times \mu_\alpha) =$ $\omega(\mu^* \times \mu) = 0$; d'où $\mu \in N_{\omega_s}$, c'est-à-dire $\widehat{\mu} = 0$.

1.2.2. Pour toute structure préhilbertienne σ- permise, $\pi_s(\delta_\psi)$ est fortement continue en ψ .

Nous savons que pour tout $\mu \in \overline{M_1(H,\sigma)}$, il existe $\nu = \sum_{i=1}^{n} c_i \delta_{\psi_i}$ tel que $\| \widehat{\mu} - \widehat{\nu} \| \leqslant \varepsilon/4$; alors $\|[\pi(\delta_\psi) - \pi(\delta_{\psi_0})] \widehat{\mu} \| = \|[e^{i\sigma(\psi_0,\psi)} \pi(\delta_{\psi-\psi_0})$ $- \pi(\delta_0)] \widehat{\mu} \| \leqslant \|[\pi(\delta_{\psi-\psi_0}) - \pi(\delta_0)] \widehat{\mu} \| + |1-e^{i\sigma(\psi_0,\psi)}| \, \|\widehat{\mu}\| \leqslant 2\| \widehat{\mu} - \widehat{\nu}\|$ $+ \|[\pi(\delta_{\psi-\psi_0}) - \pi(\delta_0)] \widehat{\nu} \| + | 1- e^{i\sigma(\psi_0,\psi)}| \, \|\widehat{\mu}\|$.

D'une part, σ étant continue en ψ , il existe un voisinage V_1 de ψ_0 , tel que $\psi \in V_1$ implique $|1 - e^{i\sigma(\psi_0,\psi)}| < \varepsilon/4 \, \|\widehat{\mu}\|$. D'autre part , en posant $\psi' = \psi - \psi_0$, $\|[\pi(\delta_{\psi'}) - \pi(\delta_0)] \widehat{\nu} \| = \omega(\nu^* \times [\delta_{-\psi'} - \delta_0] \times [\delta_{\psi'} - \delta_0] \times \nu)$ $\leqslant 2|\omega(\nu^* \times \nu) - \omega(\nu^* \times \delta_{\psi'} \times \nu)|$.

Comme $\omega(\nu^* \times \delta_{\psi'} \times \nu) = \sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} \; \omega(\delta_{-\psi_j} \times \delta_{\psi'} \times \delta_{\psi_i}) =$

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i\, \bar{c}_j\, e^{i\sigma(\psi_j,\psi_i)}\, e^{i\sigma(\psi_i+\psi_j,\psi')}\, \Omega'(\psi'-\psi_j+\psi_i)$$ est bien continue en ψ',

il existe un voisinage V_2 de ψ_o, tel que $\psi \in V_2$ implique $\|[\pi(\delta_{\psi'}) - \pi(\delta_o)]\,\hat{\nu}\| \leqslant \varepsilon/4$. D'où, $\psi \in V_1 \cap V_2$ implique $\|[\pi(\delta_\psi) - \pi(\delta_{\psi_o})]\,\hat{\mu}\| \leqslant \varepsilon$.

1.2.3 Pour toute structure préhilbertienne σ- permise de (H,σ) et pour tout $\psi \in \bar{H}$ (complétion de H pour la norme $\|\psi\|^2 = s(\psi,\psi)$),

$$\pi(\delta_\psi) \in \pi(\mathcal{M}_1(H,\sigma))'' \subset \mathcal{L}(I_{\Omega'})$$

Cette proposition est une conséquence immédiate de 1.2.2.

Soient $E_\alpha \in \mathcal{G}$, $(e_i, f_i)_{i=1..n}$ une base symplectique de E_α et $E_\alpha^\perp = \{\psi \in H \mid \forall \varphi \in E_\alpha,\ \sigma(\psi,\varphi) = 0\}$. E_α étant régulier, $E_\alpha^\perp$ l'est aussi. L'application $\mu_\alpha \in M_1(E_\alpha,\sigma) \longrightarrow \widehat{(\mu_\alpha,E_\alpha)} \in \mathcal{M}_1(E_\alpha,\sigma)$ est un isomorphisme isométrique ; nous identifierons donc les deux espaces. Notons par I_α l'espace $\overline{M_1(E_\alpha,\sigma)/N_\omega}$ et par I'_α l'espace $\overline{M_1(E_\alpha^\perp,\sigma)/N_\omega}$ qui contiennent respectivement $A_\alpha = \{\hat{\delta}_\psi \mid \psi \in E_\alpha\}$ et $A'_\alpha = \{\hat{\delta}_\psi \mid \psi \in E_\alpha^\perp\}$.

1.2.4 $I_\alpha \times I'_\alpha$ est dense dans $I_{\Omega'}$.

Tout vecteur de H se met sous la forme unique $\psi = \psi_1 + \psi_2$ où $\psi_1 = \sum_{i=1}^{n} \sigma(\psi,f_i)\, e_i - \sum_{i=1}^{n} \sigma(\psi,e_i) f_i \in E_\alpha$ et $\psi_2 = \psi - \psi_1 \in E_\alpha^\perp$. Ce qui implique que $\delta_\psi = \delta_{\psi_1} \times \delta_{\psi_2}$ et que $A = A_\alpha \times A'_\alpha \subset I_\alpha \times I'_\alpha \subset I_{\Omega'}$.

1.2.1. nous montre que $\overline{I_\alpha \times I'_\alpha} = I_{\Omega'}$.

Il est facile de vérifier sur $\mathcal{M}_1(E_\alpha,\sigma)$ et $\mathcal{M}_1(E_\alpha^\perp,\sigma)$ que les éléments de $\overline{M_1(E_\alpha,\sigma)}$ commuttent avec ceux de $\overline{M_1(E_\alpha^\perp,\sigma)}$.

2- AUTOMORPHISMES DE $\overline{M_1(H,\sigma)}$, INDUITS PAR LES OPERATEURS SYMPLECTIQUES DE (H,σ)

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

2.1. Automorphismes et représentations d'une C*-algèbre.

Soient $\mathfrak{A}$ une C*-algèbre , $\alpha(\mathfrak{A})$ le groupe des automorphismes de $\mathfrak{A}$. Pour tout $T \in \alpha(\mathfrak{A})$ et pour tout $x \in \mathfrak{A}$, nous écrirons x^T et $x^{T^{-1}}$ au lieu de $T(x)$ et $T^{-1}(x)$ respectivement . Si de plus, f est une forme positive de $\mathfrak{A}$ et π une représentation de $\mathfrak{A}$ dans H , nous poserons , $f^T(x) = f(x^{T^{-1}})$ et $\pi^T(x) = \pi(x^{T-1})$. Evidemment, f est une forme positive (resp. pure, état) si et seulement si f^T est une forme positive (resp. pure, état) et π est cyclique (resp.irréductible) si et seulement si π^T est cyclique (resp. irréductible). Nous dirons que T est implémentable pour π , si π et π^T sont unitairement équivalents. Notons par $\alpha_\pi(\mathfrak{A})$ le groupe des automorphismes de $\mathfrak{A}$ implémentables pour π .

2.1.1. Soient π une représentation cyclique admettant ξ pour vecteur cyclique et f la forme associée à π et ξ . Si $T \in \alpha(\mathfrak{A})$ est tel que $f=f^T$, alors, $T \in \alpha_\pi(\mathfrak{A})$.

Cette proposition est un cas particulier de ([3] , 2.4.1).

2.1.2. Si f est un état pur et π la représentation définie par f (voir [3], 2.4.5) , alors, $T \in \alpha_\pi(\mathfrak{A})$ si et seulement s'il existe un élément unitaire u de $\tilde{\mathfrak{A}}$ ($\tilde{\mathfrak{A}}$ étant la C*-algèbre déduite de $\mathfrak{A}$ par adjonction d'un élément unité), tel que $f^T(x) = f(u^* x u)$ pour tout $x \in \mathfrak{A}$.

Cette proposition est un cas particulier de ([3], 2.8.6).

2.1.1. et 2.1.2. nous permettent de voir sur les formes associées, si un automorphisme est implémentable pour une représentation donnée. Nous les utiliserons dans la suite.

2.2. Opérateurs symplectiques.

H étant un espace vectoriel réel, σ une forme symplectique, nous dirons d'un opérateur linéaire T dans H, qu'il est symplectique, si et seulement si T est surjectif et $\sigma(T\psi, T\varphi) = \sigma(\psi, \varphi)$ pour tout $\psi, \varphi \in H$. Notons $S(H,\sigma)$ l'ensemble des opérateurs symplectiques.

On voit aisément que pour tout $T \in S(H,\sigma)$, T est régulier et $T^{-1} \in S(H,\sigma)$. Comme l'identité I est un opérateur symplectique, $S(H,\sigma)$ est un groupe multiplicatif. Si E est un sous espace vectoriel de H, T un élément de $S(H,\sigma)$, alors E est régulier si et seulement si $T E$ est régulier. Ceci implique que les éléments de $S(H,\sigma)$ laissent $\mathfrak{S}$ invariant. Nous savons en outre que tout opérateur linéaire T restreint aux éléments de $\mathfrak{S}$, ceci pour toute structure préhilbertienne σ-permise, est continu puisqu'il agit sur un espace vectoriel normé de dimension finie.

2.2.1. Pour tout $E \in \mathfrak{S}$, pour tout $T \in S(H,\sigma)$, l'application $f \longrightarrow f^T = f\circ T^{-1}$ est un isomorphisme de l'espace de Banach $\mathscr{C}_0(E)$ sur l'espace de Banach $\mathscr{C}_0(TE)$.

Si $f \in \mathscr{C}_0(E)$ il est clair que f^T est définie et continue sur TE. f^T s'annule à l'infini car si $|f(\psi)| < \varepsilon$ en dehors d'un compact $Q \subset E$, $|f^T(\psi)|<\varepsilon$ en dehors du compact $TQ \subset TE$. Donc $f^T \in \mathscr{C}_0(TE)$. Les propriétés $\|f\| = \|f^T\|$, $(f^*)^T = (f^T)^*$, $(f.g)^T = f^T.g^T$ et $(\alpha f+\beta g) = \alpha f^T + \beta g^T$ pour tout $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ et pour tout $f,g \in \mathscr{C}_0(E)$ sont évidentes. L'application $f \longrightarrow f^T$ est bijective car elle admet pour fonction inverse $f \longrightarrow f^{T^{-1}}$.

2.2.2. Pour $T \in S(H,\sigma)$, l'application $\tau_T : \mu \longrightarrow \mu^T$ où $\mu^T(f) = \mu(f^{T^{-1}})$ pour tout $f \in \mathscr{C}_0(E)$ est un isomorphisme de $M_1(E,\sigma)$ sur $M_1(TE,\sigma)$ qui peut s'étendre en isomorphisme de la C*-algèbre $\overline{M_1(E,\sigma)}$ sur la C*-algèbre $\overline{M_1(TE,\sigma)}$. De plus $(\delta_\psi)^T = \delta_{T\psi}$ pour tout $\psi \in E$.

En utilisant 2.2.1. cette proposition est immédiate.

([3], 1.3.7 et 1.8.1) impliquent que $\|\mu^T\| = \|\mu\|$ pour tout $\mu \in \overline{M_1(E,\sigma)}$. et pour tout $T \in S(H,\sigma)$.

<u>2.3. Automorphismes de $\overline{M_1(H,\sigma)}$, induits par les éléments de $S(H,\sigma)$.</u>

2.3.1. Soit T un élément de $S(H,\sigma)$; pour tout $E_\alpha, E_\beta \in \mathfrak{S}$ tel que $E_\alpha \subset E_\beta$ et pour tout $\mu_\alpha \in M_1(E_\alpha,\sigma)$ nous avons,

$$\left\{ \quad (\varphi_{E_\beta, E_\alpha} \mu_\alpha)^T = \varphi_{TE_\alpha, TE_\beta} \mu_\alpha^T \right.$$

Pour tout $f^T \in \mathcal{C}_o(TE_\beta)$, $(\varphi_{E_\beta, E_\alpha} \mu_\alpha)^T (f^T) = \mu_\alpha(f|E_\alpha)$, $(\varphi_{TE_\beta, TE_\alpha} \mu_\alpha^T)(f^T) = \mu_\alpha^T(f^T|TE_\alpha)$ et la proposition se déduit du fait que $(f^T|TE_\alpha)^T = f|E_\alpha$.

2.3.2. $\left\{ \right.$ Soit T un élément de $S(H,\sigma)$; alors, $(\mu_\alpha, E_\alpha) \sim (\mu_\beta, E_\beta)$ si et seulement si $(\mu_\alpha^T, TE_\alpha) \sim (\mu_\beta^T, TE_\beta)$.

$(\mu_\alpha, E_\alpha) \sim (\mu_\beta, E_\alpha)$ si et seulement si, il existe $E_\gamma \in \mathcal{C}$ tel que $E_\alpha \cup E_\beta \subset E_\gamma$ et $\varphi_{E_\gamma, E_\alpha} \mu_\alpha = \varphi_{E_\gamma, E_\beta} \mu_\beta$. D'après 2.3.1. cette égalité a lieu si et seulement si $\varphi_{TE_\gamma, TE_\alpha} \mu_\alpha^T = \varphi_{TE_\gamma, TE_\beta} \mu_\beta^T$, c'est-à-dire , $(\mu_\alpha^T, TE_\alpha) \sim (\mu_\beta^T, TE_\beta)$.

Cette dernière proposition donne un sens à la définition suivante : pour tout $\widehat{(\mu_\alpha, E_\alpha)} \in \mathcal{M}_1(H,\sigma)$ et $T \in S(H,\sigma)$, $\widehat{(\mu_\alpha, E_\alpha)}^T = \widehat{(\mu_\alpha^T, TE_\alpha)}$. ([1], 83) et la remarque qui suit 2.2.2, nous montrent que pour tout $\mu \in \mathcal{M}_1(H,\sigma)$ et $T \in S(H,\sigma)$, $\|\mu^T\| = \|\mu\|$. Nous avons donc un automorphisme de $\mathcal{M}_1(H,\sigma)$ qui peut être étendu à $\overline{M_1(H,\sigma)}$.

2.3.3. $\left\{ \right.$ L'application $\tau : T \in S(H,\sigma) \longrightarrow \tau_T \in \alpha(\overline{M_1(H,\sigma)})$ est un monomorphisme.

Vérifions sur $\mathcal{M}_1(H,\sigma)$, que $\tau_{TT'} = \tau_T \tau_{T'}$. Par continuité, cette égalité s'étendra à $\overline{M_1(H,\sigma)}$. Pour tout $\widehat{(\mu_\alpha, E_\alpha)} \in \mathcal{M}_1(H,\sigma)$, $\widehat{(\mu_\alpha, E_\alpha)}^{TT'} =$

$\widehat{(\mu_\alpha^{TT'}, TT'E_\alpha)}$ et $\widehat{((\mu_\alpha,E_\alpha)^{T'})^T} = \widehat{(\mu_\alpha^{T'},T'E_\alpha)^T} = \widehat{((\mu_\alpha^{T'})^T, TT'E_\alpha)}$.
Or pour tout $f \in \mathscr{C}_o(TT'E_\alpha)$, $(f^{T^{-1}})^{T'^{-1}} = f^{T'^{-1}T^{-1}}$; d'où $\mu_\alpha^{TT'} = (\mu_\alpha^{T'})^T$, ce qui prouve que $\tau_{TT'} = \tau_T \cdot \tau_{T'}$. Montrons que τ est injectif : supposons que $\tau_T = \tau_{T'}$, ce qui implique que pour tout $\widehat{(\mu_\alpha,E_\alpha)} \in \mathcal{M}_1(H,\sigma)$, $(\mu_\alpha^T,TE_\alpha) \sim (\mu_\alpha^{T'},T'E_\alpha)$. Ainsi pour tout $E_\gamma \in \mathfrak{S}$ et vérifiant $TE_\alpha \cup T'E_\alpha \subset E_\gamma$, pour tout $f \in \mathscr{C}_o(E_\gamma)$, nous avons $\mu_\alpha^T(f|TE_\alpha) = \mu_\alpha^{T'}(f|T'E_\alpha)$; d'où, $\mu_\alpha(f^{T^{-1}}|E_\alpha) = \mu_\alpha(f^{T'^{-1}}|E_\alpha)$, pour tout $\mu_\alpha \in M_1(E_\alpha,\sigma)$. Comme $M_1(E_\alpha,\sigma)$ sépare $\mathscr{C}_o(E_\alpha)$, nous avons : pour tout $\psi \in E_\alpha$, $f(T\psi) = f(T'\psi)$. Cette égalité étant vraie pour tout $f \in \mathscr{C}_o(E_\gamma)$ et $\mathscr{C}_o(E_\gamma)$ séparant E_γ, $T\psi = T\psi'$ pour tout $\psi \in E_\alpha$. Or E_α est un élément quelconque de $\mathfrak{S}$, lequel est absorbant pour H. Donc $T = T'$.

Nous pouvons donc considérer $S(H,\sigma)$, comme un sous groupe de $\alpha(\overline{M_1(H,\sigma)})$; c'est ce que nous ferons dans la suite.

2.4. Etude de $\alpha_\pi(\overline{M_1(H,\sigma)})$

Supposons que J soit un opérateur de H, définissant une structure préhilbertienne σ- permise. Soit s la partie réelle de la forme hermitienne correspondante. Pour tout $T \in S(H,\sigma)$, $J^T = T.J.T^{-1}$ définit une structure préhilbertienne σ- permise et la partie réelle de la forme hermitienne correspondante est $s^T(\psi,\varphi) = -\sigma(J^T\psi,\varphi) = s(T^{-1}\psi, T^{-1}\varphi)$. Soit π_s la représentation attachée à ω_s. Evidemment, π_s^T est la représentation attachée à ω_s^T.

2.4.1. $\left\{ \quad \omega_s{}^T = \omega_{s^T} \right.$

Cette proposition se vérifie aisément sur $\mathcal{M}_1(H,\sigma)$.

Notons $S_\pi(H,\sigma) = S(H,\sigma) \cap \overline{\alpha_\pi(M_1(H,\sigma))}$. D'après 2.1.2. , nous savons que $T \in S_\pi(H,\sigma)$, si et seulement s'il existe un unitaire u de $\overline{M_1(H,\sigma)}$ tel que pour tout $\mu \in \overline{M_1(H,\sigma)}$, $\omega_{s^T}(\mu) = \omega_s(u^* \times \mu \times u)$. Un cas très important que nous rencontrerons dans la suite, est celui où $\omega_s = \omega_{s^T}$, ce qui implique $T \in S_\pi(H,\sigma)$. A l'aide de 1.1.2. on voit aisément que,

2.4.2. $\left\{ \right.$ Pour tout $T \in S(H,\sigma)$, $\omega_s = \omega_{s^T}$ si et seulement si T commute avec J.

Donc $S^J(H,\sigma) = \{ T \in S(H,\sigma) \mid [T,J]_- = 0 \}$ est un sous groupe de $S_\pi(H,\sigma)$. **Cest le groupe des opérateurs unitaires (pour la structure préhilbertienne définie par J) de H .**

Pour tout élément $E_\alpha \in \mathcal{G}$ nous pouvons considérer $S(E_\alpha , \sigma)$ comme un sous ensemble de $S(H,\sigma)$ car l'application $T \in S(E_\alpha,\sigma) \longrightarrow \widetilde{T} \in S(H,\sigma)$ où $\widetilde{T} \mid E_\alpha = T$ et $\widetilde{T} \mid E_\alpha^\perp = 1$ est un monomorphisme.

2.4.3. $\left\{ \right.$ Pour tout $E_\alpha \in \mathcal{G}$, pour toute structure préhilbertienne σ- permise, $S(E_\alpha,\sigma) \subset S_\pi(H,\sigma)$.

D'après la définition de la C*-algèbre $\overline{M_1(E,\sigma)}$ dans [1], nous voyons que

dans la restriction à $\overline{M_1(E_\alpha,\sigma)}$, $\pi_{s^{\widetilde{T}}}$ et π_s sont unitairement équivalents.

Comme $\omega_s{}^{\widetilde{T}} = \omega_{s^{\widetilde{T}}}$, $\pi_s{}^{\widetilde{T}}$ et $\pi_{s^{\widetilde{T}}}$ sont unitairement équivalents (voir ([3],2.8.6)).

d'où $\pi_s^{\widetilde{T}}$ est unitairement équivalent à π_s et il existe un unitaire $u \in \overline{M_1(E_\alpha,\sigma)}$ tel que pour tout $\mu \in \overline{M_1(E_\alpha,\sigma)}$ on ait $\omega_s^{\widetilde{T}}(\mu) = \omega_s(u^* \times \mu \times u)$. Cette dernière égalité reste vraie pour les éléments de $\overline{M_1(E_\alpha^{\perp},\sigma)}$ puisque $\widetilde{T} \,|E_\alpha^{\perp} = 1$ et puisque $[\mu,u]_- = 0$ (voir la remarque qui suit 1.2.4.). De plus $\omega(\mu) = \omega(\widehat{\mu})$ par définition ; donc seule la classe de μ intervient. En utilisant 1.2.4. nous voyons donc que pour tout $\mu \in \overline{M_1(H,\sigma)}$, $\omega_s^{\widetilde{T}}(\mu) = \omega_s(u^* \times \mu \times u)$. D'où $\widetilde{T} \in S_\pi(H,\sigma)$.

2.4.4. $\left\{ \quad S^J(H,\sigma) \neq S_\pi(H,\sigma). \right.$

Soient $E_\alpha \in \mathcal{E}$ avec $\dim E_\alpha = 4$, $(e_i,f_i)_{i=1,2}$ une base symplectique de E_α vérifiant $Je_i = f_i$ (**on construit aisément un tel espace**). Soit T un opérateur linéaire de E_α vérifiant $Te_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} e_1 + \frac{1}{2} e_2$, $Te_2 = -\frac{1}{2} e_1 + \frac{\sqrt{3}}{3} e_2$, $Tf_1 = \frac{4\sqrt{3}}{7} f_1 + \frac{6}{7} f_2$ et $Tf_2 = -\frac{6}{7} f_1 + \frac{4\sqrt{3}}{7} f_2$. On voit aisément que $T \in S\,(E_\alpha,\sigma)$ donc $\widetilde{T} \in S_\pi(H,\sigma)$. De plus, il est évident que $[\widetilde{T},J]_- \neq 0$.

2.5. Représentation de Fock "invariante de Lorentz" et $\mathcal{L}^\uparrow$

Plaçons nous dans le cas où $H = K_m^+$ et où $\sigma(\varphi,\psi) = \mathcal{J}\{\int \varphi_F(\bar{k})^* \, \psi_F(\bar{k}) \, d\,\Omega_m(\bar{k})\}$ (voir [2], chapitres IV et V). Si $\Lambda \in \mathcal{L}^\uparrow$, T_Λ défini par $T_\Lambda(\varphi) = \varphi_o\Lambda^{-1}$ est un élément de $S(K_m^+,\sigma)$. **La multiplication par** i, définit sur K_m^+ une structure hilbertienne σ- permise. Evidemment $T_\Lambda \in S^i(K_m^+,\sigma)$, ce qui implique que $s^{T_\Lambda} = s$ où $s(\varphi,\psi) = \mathcal{R}\{\int \varphi_F(\bar{k})^* \, \psi_F(\bar{k}) \, d\,\Omega_m(\bar{k})\}$. Par conséquent, les éléments de $\mathcal{L}^\uparrow$ sont implémentables pour la représentation de Fock π_s.

3 - ANTIAUTOMORPHISMES DE $\overline{M_1(H,\sigma)}$ INDUITS PAR LES OPERATEURS ANTISYMPLECTIQUES DE (H,σ)

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

3.1 Antireprésentation d'une C^*-algèbre.

Soit H un espace préhilbertien. Notons par $\check{H}$ l'espace préhilbertien obtenu de la façon suivante : les éléments de $\check{H}$ sont les mêmes que ceux de H, **nous les distinguerons en les pointant** $(\check{\xi} \in \check{H} \Longleftrightarrow \xi \in H)$; par définition $\check{\xi} + \check{\zeta} = \widehat{\xi + \zeta}$, $\alpha\check{\xi} = \widehat{\bar{\alpha}\xi}$ et $(\check{\xi} \,|\check{\zeta}) = (\zeta|\xi)$ pour tout $\check{\xi},\check{\zeta} \in \check{H}$ et pour tout $\alpha \in C$. Notons $\mathcal{J}$ l'application $\xi \rightarrow \check{\xi}$. C'est une application isométrique, surjective, antilinéaire (antiunitaire). Evidemment $\check{\check{H}} = H$ et la condition nécessaire et suffisante pour que H soit complet est que $\check{H}$ le soit.

Si $\mathfrak{A}$ est une C^*-algèbre, nous dirons que π' est une **antireprésentation** (a-représentation) de $\mathfrak{A}$ dans H si et seulement si $\pi'(x.y) = \pi'(x).\pi'(y)$, $\pi'(\alpha x+\beta y) = \bar{\alpha}\pi'(x) + \bar{\beta}\pi'(y)$ et $\pi'(x)^* = \pi'(x^*)$, pour tout $x,y \in \mathfrak{A}$ et pour tout $\alpha, \beta \in C$. Soit π une représentation de $\mathfrak{A}$ dans H. **L'antireprésentation** $\check{\pi}$ de $\mathfrak{A}$ dans $\check{H}$ associée à π, est définie par $\check{\pi}(x) =, \mathcal{J}\pi(x)\,\mathcal{J}^{-1}$ pour tout $x \in \mathfrak{A}$. L'application $\pi \rightarrow \check{\pi}$ est de toute évidence une bijection entre l'ensemble des représentations de $\mathfrak{A}$ et l'ensemble des a-représentations de $\mathfrak{A}$. Donc toute représentation de $\mathfrak{A}$ est antiunitairement équivalente (a-équivalente) à une a-représentation de $\mathfrak{A}$.

On voit aisément que si f est la forme positive associée à π et ξ $(\xi \in H)$, $\bar{f}$ $(\bar{f}(x)=\overline{f(x)})$ est la forme positive antilinéaire $(\bar{f}(x^*x) \geqslant 0$ et $\bar{f}(\alpha x+\beta y)= \bar{\alpha}\, \bar{f}(x)+\bar{\beta}\, \bar{f}(y))$ (a-forme positive) associée à π et ξ, c'est-à-dire, $f(x) = (\xi|\pi(x)|\xi) \Longleftrightarrow \bar{f}(x) = (\xi|\bar{\pi}(x)|\xi)$. Par une construction analogue à celle de Guelfand-Naimark ([3],2.4.4.)(au lieu de la translation régulière à gauche on prend la translation à droite précédée de l'involution), à toute a-forme positive f' on fait correspondre une a-représentation π' qui est évidemment antiunitairement équivalente à la représentation π associée à la forme positive $\bar{f}'$. De là nous tirons à l'aide de ([3],2.8.6.) la proposition suivante :

3.1.1. Soient f_1 un état pur et f_2 un a-état pur (i.e. $\bar{f}_2$ est un état pur), d'une C*-algèbre $\mathfrak{A}$, π_1 une représentation associée à f_1, π_2 une a-représentation associée à f_2, alors π_1 et π_2 sont a-équivalentes, si et seulement s'il existe un élément unitaire $u \in \mathfrak{A}$ tel que, pour tout $x \in \mathfrak{A}$
$f_1(x) = \overline{f_2(u^*.x.u)}$.

3.2. Opérateurs antisymplectiques.

Dans les mêmes conditions que 2.2 nous dirons d'un opérateur linéaire dans H, qu'il est antisymplectique, si et seulement si T est surjectif et $\sigma(T\psi,T\varphi) = -\sigma(\psi,\varphi)$, pour tout $\psi, \varphi \in H$. Notons $AS(H,\sigma)$.

l'ensemble des opérateurs antisymplectiques de (H,σ).

Nous obtenons les mêmes propositions que dans 2.2. et 2.3. à condition de prendre les définitions suivantes : $f^T(\psi) = \overline{f(T^{-1}\psi)}$ et $\mu^T(f) = \overline{\mu(f^{T^{-1}})}$. Les propositions 2.3.3. , 2.4.1. et 2.4.2. deviennent respectivement :

3.2.1. L'application $\tau : T \in A\,S(H,\sigma) \longrightarrow \tau_T \in a\text{-}\alpha\ (\overline{M_1(H,\sigma)})$, où $\tau_T(\mu) = \mu^T$ est une injection.

3.2.2. Pour tout $T \in A\,S(H,\sigma)$, $\omega_s{}^T = \overline{\omega_{s^T}}$.

3.2.3. Pour tout $T \in A\,S(H,\sigma)$, $\omega_s = \omega_{s^T}$, si et seulement si $[J,T]_+ = 0$.

Donc $A\,S^J(H,\sigma) = \{\ T \in A\,S(H,\sigma) \,|\, [J,T]_+ = 0\ \}$ est un sous ensemble de $A\,S_\pi(H,\sigma)$. De 3.1.1. nous déduisons immédiatement :

3.2.4. $T \in A\,S_\pi(H,\sigma)$, si et seulement s'il existe un unitaire u de $\overline{M_1(H,\sigma)}$ tel que $\omega(\mu) = \overline{\omega^T(u^* \times \mu \times u)}$.

3.3. Représentation de Fock "invariante de Lorentz" et $\mathcal{L}^{\downarrow}$

Nos notations sont celles de 2.5., toutefois pour $\Lambda \in \mathcal{L}^{\downarrow}$ nous prenons $[T_\Lambda(\varphi)](\psi) = \overline{(\varphi_o\, \Lambda^{-1})(\psi)}$. Comme $[T_\Lambda, i]_+ = 0$, 3.2.3. nous montre que pour tout $\Lambda \in \mathcal{L}^{\downarrow}$, $T_\Lambda \in A\,S^i(K_m^*,\sigma)$, c'est-à-dire que les éléments de $\mathcal{L}^{\downarrow}$ sont implémentables pour la représentation de Fock induite par i .

4 - SPIN ISOTOPIQUE

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

Soit (H,σ) l'espace monoparticulaire des bosons scalaires neutres. Pour introduire n degrés de liberté supplémentaires (charge ou spin par exemple), nous prendrons pour espace monoparticulaire (H',σ') où $H' = H \otimes E$, E étant un espace vectoriel réel de dimension n et $\sigma'(\sum_i \psi_i \otimes x_i, \sum_j \varphi_j \otimes y_j) = \sum_{i,j} \sigma(\psi_i,\varphi_j)(x_i|y_i)$, $(x \mid y)$ étant un produit scalaire euclidien de E. Cette définition est cohérente car $\sigma'((\psi_1+\psi_2)\otimes x, \sum_j \varphi_j \otimes y_j)$ $= \sigma'(\psi_1\otimes x+\psi_2\otimes x, \sum_j \varphi_j \otimes y_j)$, $\sigma'(\psi \otimes(x_1+x_2), \sum_j \varphi_j \otimes y_j) = \sigma'(\psi \otimes x_1+\psi \otimes x_2, \sum_j \varphi_j \otimes y_j)$ et $\sigma'((\alpha\psi) \otimes x, \sum_j \varphi_j \otimes y_j) = \sigma'(\psi \otimes (\alpha x); \sum_j \varphi_j \otimes y_j)$.

Il est évident que σ' est une forme symplectique régulière de H'. Soient $e_1, e_2 \ldots e_n$, en une base orthonormale de E, $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^n$ la base duale correspondante. Les sous espaces vectoriels $H'_i = H \otimes \{e_i\}$, $i=1,\ldots n$, décrirons les divers degrés de liberté introduits et leurs projecteurs orthogonaux seront $P_i = I \otimes e_i\varepsilon^i$, $i=1,\ldots n$ respectivement.

4.1. Représentations de Fock et opérateurs de champs.

Soit J un opérateur de H induisant une structure préhilbertienne σ-permise et définissons l'opérateur J' sur H' par $J'(\sum_i \psi_i \otimes x_i) = \sum_i J\psi_i \otimes x_i$. On voit que J' définit sur H' une structure préhilbertienne σ'- permise et que $s'(\psi \otimes x, \varphi \otimes y) = -\sigma'(J'(\psi\otimes x), \varphi\otimes y)$

$= s(\psi,\varphi) . (x|y)$. Considérons la représentation de Fock $\pi_{s'}$ de $\overline{M_1(H',\sigma')}$, associé à $\omega_{s'}$. De même que dans ([1], chapitre 5), nous définissons l'opérateur de champs associé à $\pi_{s'}$ par $B_{s'}(\psi \otimes x) = -i \lim_{\lambda=0} \frac{\pi_{s'}(\delta_{\lambda(\psi\otimes x)})-I}{\lambda}$, de façon que $\pi_{s'}(\delta_{\psi\otimes x}) = e^{i B_{s'}(\psi\otimes x)}$. Cet opérateur est identique à $a^+\{(\psi \otimes x)\} + a^-\{(\psi \otimes x)\}$, défini sur l'espace de Hilbert $\mathcal{S}(\overline{H'}) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \overline{SH'^{\otimes p}}$.

4.2. Automorphismes d'isospin.

Un opérateur d'isospin est un opérateur linéaire de H' de la forme $T' = I \otimes T$ où $T \in \mathcal{L}(E,E)$. On voit que T' est symplectique si et seulement si T appartient au groupe orthogonal de E, $O(E)$. Comme nous l'avons vu dans 2.3., le groupe $\{I \otimes T \mid T \in O(E)\}$ induit un sous-groupe de $\alpha(\overline{M_1(H',\sigma')})$; c'est le groupe des automorphismes d'isospin. Certains opérateurs d'isospin, de la forme $T'_{ij} = I \otimes \{e_i\varepsilon^j + e_j\varepsilon^i + \sum_{k\neq i,j} e_k\varepsilon^k\}$, qui sont les bijections entre H'_i et H'_j, ont parfois une interprétation physique importante (conjugaison de charge par exemple).

4.3. Bosons scalaires chargés.

Pour décrire les bosons scalaires chargés, il suffit de prendre $\dim E = 2$. Soit (e_1,e_2) une base orthonormée de E. $H'_1 = H \otimes \{e_1\}$ sera l'espace des particules positives, $H'_2 = H \otimes \{e_2\}$ celui des particules négatives. La conjugaison de charge est l'opérateur $\mathbf{C} = 1 \otimes e_1\varepsilon^2 + e_2\varepsilon^1$ ($\mathbf{C}(f \otimes e_1) = f \otimes e_2$ et $\mathbf{C}(f \otimes e_2) = f \otimes e_1$). Soit $\Gamma = 1 \otimes e_1\varepsilon^1 - e_2\varepsilon^2$

$(\Gamma(f \otimes e_1) = f \otimes e_1$ et $\Gamma(f \otimes e_2) = -f \otimes e_2)$, alors les opérateurs $P_1 = \frac{1+\Gamma}{2} = 1 \otimes e_1\varepsilon^1$ et $P_2 = \frac{1-\Gamma}{2} = 1 \otimes e_2\varepsilon^2$ sont deux projecteurs complémentaires tels que val $P_1 = H'_1$, val $P_2 = H'_2$, $P_1(f\otimes e_1 + g\otimes e_2) = f\otimes e_1$ et $P_2(f\otimes e_1 + g\otimes e_2) = g\otimes e_2$. On remarquera de plus que , Γ et $C \in S(H',\sigma')$ que $C^2 = \Gamma^2 = 1$ et que $[\Gamma,C]_+ = 0$. Dorénavant nous écrirons pour tout $\psi \in H'$, $\psi = P_1\psi + P_2\psi = \psi^+ + \psi^-$. Evidemment $(C\psi)^+ = C\psi^-$ et $(C\psi)^- = C\psi^+$.

Soient maintenant $p_1 = \frac{1+C}{2}$ et $p_2 = \frac{1-C}{2}$; ce sont deux projecteurs complémentaires tels que

$p_1(f \otimes e_1 + g \otimes e_2) = \frac{f+g}{2} \otimes e_1 + \frac{f+g}{2} \otimes e_2$ et $p_2(f \otimes e_1 + g \otimes e_2) = \frac{f-g}{2} \otimes e_1 - \frac{f-g}{2} \otimes e_2$. Pour tout $\psi \in H'$, posons $\psi = p_1\psi + p_2\psi = \psi_+ + \psi_-$. Evidemment $(\Gamma\psi)_+ = \Gamma\psi_-$ et $(\Gamma\psi)_- = \Gamma\psi_+$. Nous aurions donc aussi bien pu prendre pour espace des particules positives val p_1 , pour espace des particules négatives val p_2 et pour conjugaison de charge Γ. val P_1 , val P_2 , val p_1 et val p_2 sont réguliers, car pour tout $\psi, \psi' \in H'$, $\sigma'(X\psi, X\psi') = \sigma'(\psi, X\psi')$ où $X = P_1, P_2, p_1, p_2$; en effet , si pour tout $\psi \in H'$, $0 = \sigma'(X\psi, X\psi') = \sigma'(\psi, X\psi')$, comme σ' est régulier, nous avons $X\psi' = 0$.

Comme nous l'avons vu C et Γ sont des automorphismes d'isospin et même pour toute structure préhilbertienne σ- permise de H, C et $\Gamma \in S^{J'}(H',\sigma')$.

4.4. Conjugaison de charge sur un espace symplectique.

Soient (H,σ) un espace symplectique et Γ, $C \in S(H,\sigma)$ tels que $C^2 = \Gamma^2 = 1$ et $[\Gamma,C]_+ = 0$. Posons $P_1 = \frac{1+\Gamma}{2}$, $P_2 = \frac{1-\Gamma}{2}$, $p_1 = \frac{1+C}{2}$, $p_2 = \frac{1-C}{2}$, val $P_1 = H^+$, val $P_2 = H^-$, val $p_1 = H_+$ et val $p_2 = H_-$. . On vérifie comme dans 4.3., que H^+, H^-, H_+ et H_- sont des sous espaces vectoriels réguliers de H. Comme $CP_1 = P_2C$ et $\Gamma p_1 = p_2\Gamma$ on voit que C est une bijection linéaire de H^+ sur H^- et Γ une bijection linéaire de H_+ sur H_-. Pour l'interprétation physique, nous avons donc le choix suivant : soit H^+ et H^- seront les espaces positifs et négatifs respectivement avec C comme conjugaison de charge, soit H_+ et H_- seront les espaces positifs et négatifs respectivement avec Γ comme conjugaison de charge. Il est clair que H^+ est orthogonal de H^- et H_+ celui de H_-.

Une représentation de Fock π, sera dite compatible avec la conjugaison de charge C, si et seulement si, $C \in S^J(H,\sigma)$.

5 - GROUPE D'AUTOMORPHISMES ASSOCIE A UN OPERATEUR HERMITIEN DE H

-:-:-:-: :-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

5.1. Généralités.

Supposons donnée une structure préhilbertienne σ - permise ; notons i l'opérateur qui définit cette structure et s la partie réelle du produit scalaire. Soit B un opérateur hermitien (pour la structure préhilbertienne définie par i) de H . Nous savons que le sous groupe $\{e^{itB} \mid t \in \mathbb{R}\}$ du groupe des opérateurs unitaires $S^i(H,\sigma)$ induit un sous-groupe $\{\tau_e itB \mid t \in \mathbb{R}\}$ de $\alpha_{\pi_s}(\overline{M_1(H,\sigma)})$ (2.4.2).

5.1.1. Il existe une représentation unitaire continue U de $\mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on ait :

$$\pi_s(\tau_e itB(\mu)\ ) = U(t)\ \pi_s(\mu)\ U(t)^{-1} \quad \text{pour tout } \mu \in \overline{M_1(H,\sigma)}\ .$$

Posons par définition $U(t)\,\widehat{\mu} = \widehat{\tau_e itB(\mu)}$ (notations de 1.2).

U est une représentation unitaire de $\mathbb{R}$ puisque d'une part $(U(t)\widehat{\mu} \mid U(t)\widehat{\nu}) = \omega_s(\tau_e itB(\mu)^* \times \tau_e itB(\nu)) = \omega_s(\tau_e itB(\mu^* \times\nu)) = \omega_s(\mu^* \times\nu) = (\widehat{\mu} \mid \widehat{\nu})$ (2.4.2) , $U(t)\ U(t')\,\widehat{\mu} = U(t)\ \widehat{\tau_e it'B(\mu)} = \widehat{\tau_e i[t+t']B(\mu)} = U(t+t')\,\widehat{\mu}$ et d'autre part, l'image canonique $\overline{M_1(H,\sigma)}$ **est partout dense dans l'espace de représentation .**

La continuité de U résulte de 1.2.1 et du fait que pour tout

$\widehat{\mu} = \sum_{k=1}^{n} a_k\,\widehat{\delta}_{\psi_k}$ et $\widehat{\nu} = \sum_{j=1}^{m} b_j\,\widehat{\delta}_{\varphi_j}$, l'application $t \to (\widehat{\mu} \mid U(t)\,\widehat{\nu}\,) =$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \bar{a}_k\, b_j\, e^{i\sigma(\psi_k, e^{itB}\varphi_j)}\, \Omega'_s(e^{itB}\varphi_j - \psi_k)$$ est continue. Enfin pour tout μ et $\nu \in \overline{M_1(H,\sigma)}$, $\pi_s(\tau_e itB(\mu))\,\widehat{\nu} = \widehat{\tau_e itB(\mu) \times \nu} = \widehat{\tau_e itB(\mu \times \tau_e -itB(\nu))} = U(t)\,\pi_s(\mu)\,U(t)^*\,\widehat{\nu}$.

Le théorème de Stone ([6]) implique que $U(t) = e^{itC}$ où C est un opérateur hermitien de $I_{\Omega'_s}$ nous l'appellerons, "opérateur infinitésimal associé à B ". Il est clair que $\widehat{\delta}_o$ (vecteur "vide") est un vecteur propre de C à valeur propre 0 puisque $\lim\limits_{t\to 0} \frac{U(t) - I}{t}\,\widehat{\delta}_o = 0$.

Nous notons A l'opérateur de champ (i.e. $\pi_s(\delta_\psi) = e^{iA(\psi)}$), alors nous avons

5.1.2. $\Big\{\ [\, C\, ,\, A(\psi)\,]_- \subseteq -\, i\, A\, (i\, B\, \psi\,)$.

La proposition 5.1.1. implique : $\pi_s(\tau_e itB\,(\delta_\psi)) = e^{iA(e^{itB}\psi)} = e^{itC}\, e^{iA(\psi)}\, e^{-itC}$. D'une part $\lim\limits_{t\to 0} \frac{e^{i\ldots(e^{itB}\psi)} - e^{iA(\psi)}}{t} = ie^{iA(\psi)}\, A(iB\psi)$ et $\lim\limits_{\lambda\to 0} \frac{e^{iA(\lambda\psi)}A(i\lambda B\psi)}{\lambda} = A(iB\psi)$, d'autre part $\lim\limits_{t\to 0} \frac{U(t)\pi_s(\delta_\psi)U(t)^* - \pi_s(\delta_\psi)}{t} = i\,[\, C\, ,\, e^{iA(\psi)}]_-$ et $\lim\limits_{\lambda\to 0} \frac{[C, e^{iA(\lambda\psi)}]_-}{\lambda} = i[C, A(\psi)]_-$ ce qui établit la proposition.

Posons $a^+(\psi) = \frac{1}{2}\{A(\psi) - iA(i\psi)\}$ et $a^-(\psi) = \frac{1}{2}\{A(\psi) + iA(i\psi)\}$. Nous savons que $a^+(\psi)$ et $a^-(\psi)$ sont respectivement le créateur et l'annihilateur d'une particule dans l'état ψ. On peut montrer par un calcul direct que $a^-(\psi)\,\delta_o = 0$ et que $(a^+(\psi)\,\delta_o |\, a^+(\varphi)\,\delta_o) = (\psi|\varphi)$. On vérifie aisément que a^+

est linéaire, a^- antilinéaire et $[C, A(\psi)]_- \subseteq a^+(B\psi) - a^-(B\psi)$.

5.2. Opérateur " nombre de particules ".

Supposons que $B = 1$. Le groupe $\{e^{it} \mid t \in \mathbb{R}\}$ est appelé "groupe de jauge de 1ère espèce." L'opérateur infinitésimal associé à B et noté N s'appelle "opérateur nombre de particules".

Il est immédiat que $[N, a^-(\psi)]_- \subseteq -a^-(\psi)$ et que $[N, a^+(\psi)]_- \subseteq a^+(\psi)$.

Si V est un sous-espace vectoriel complet de H et P_V le projecteur orthogonal sur V , alors l'opérateur infinitésimal N_V associé à P_V est l'opérateur "nombre de particules dans un état appartenant à V".

Si H est un espace de Hilbert séparable et $(\psi_n)_n$ une base orthonormale complète, alors $N = \sum_{i=1}^{\infty} a^+(\psi_i)a^-(\psi_i)$ (voir [7]). Cependant 5.1 prouve l'existence de N même si H n'est pas séparable.

5.3. Opérateur de "charge".

Avec les notations 4.3, si nous posons $B = 1 \otimes \{e_1\varepsilon^1 - e_2\varepsilon^2\}$, nous trouvons que $C = N^+ - N^-$ où N^+ est l'opérateur nombre de particules positives et N^- l'opérateur nombre de particules négatives. Nous poserons $N^+ - N^- = Q$.

5.4. Opérateur "impulsion - énergie".

Supposons que $H = K_m^+$ (solutions de l'équation de Klein-Gordon à énergie positive) et que le produit scalaire soit $h(\psi, \varphi)$ =

$\int \psi_F(\bar{k})^* \varphi_F(\bar{k})\, d\Omega_m(\bar{k})$ (voir [2] , chapitres IV et V). Les quatre opérateurs infinitésimaux $\mathscr{H}^\mu$, $\mu = 0,1,2$ et 3 associés respectivement aux opérateurs hermitiens $i \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ sont, l'hamiltonien ($\mathscr{H}^0$) et les opérateurs d'impulsion ($\mathscr{H}^i$, $i = 1,2,3$) . En effet, d'après ce qui précède :

$$[\, \mathscr{H}^\mu, A(\psi) \,]_- \subseteq i\, A \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi \right) .$$

6 - GROUPE DES AUTOMORPHISMES DE JAUGE

DE DEUXIEME ESPECE DE $\overline{M_1(H,\sigma)}$.

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

6.1. Préliminaires :

Soit H' le dual algèbrique de H et U l'ensemble des nombres complexes de module un .

6.1.1 Si χ et $\chi' \in H'$ et si $e^{i\chi(x)} = e^{i\chi'(x)}$ pour tout $x \in H$, alors $\chi = \chi'$.

Supposons que $e^{i\chi(x)} = e^{i\chi'(x)}$ pour tout $x \in H$. D'après ([5], 9.5.5), $\chi(x) = \chi'(x) + 2\, n(x)\pi$ où n applique H dans Z . Z étant le groupe additif des entiers . Du fait que χ et χ' sont linéaires nous déduisons que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in H$, $n(\lambda x) = \lambda\, n(x)$, ce qui implique que $n(x) = 0$.

6.1.2 Soit χ un élément de H' et f la fonction définie par $f(x) = e^{i\chi(x)}$ pour tout $x \in H$. Si H est un espace vectoriel topologique, alors, f est continue si et seulement si χ est continue .

Si χ est continue, f est continue, puisqu'elle est la composition de deux fonctions continues. Supposons que f soit continue. Pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, nous savons que $\varphi : \lambda \longrightarrow e^{i\lambda}$ est un homéomorphisme de $]-\varepsilon , +\varepsilon[$ sur $\varphi(]-\varepsilon , +\varepsilon[) = V_\varepsilon$ puisque $V_\varepsilon \neq U$ ([5],9.5.7) . V_ε étant un voisinage de 1 , $f^{-1}(V_\varepsilon) = W_\varepsilon$ est un voisinage de 0 dans H .

Nous allons montrer que χ est continue au point 0. Notons t l'application $\varphi^{-1} \circ f \mid W_\varepsilon$. Il est clair que $f(x) = e^{it(x)} = e^{i\chi(x)}$. Pour établir la proposition il nous suffira de prouver que $\chi \mid W_\varepsilon = t$.

Si x et $y \in W_\varepsilon$

alors

$$e^{it(\lambda x + (1-\lambda)y)} = e^{i\chi(\lambda x + (1-\lambda)y)}$$

$$= e^{i\chi(\lambda x)} e^{i\chi((1-\lambda)y)} = e^{i[t(\lambda x) + t((1-\lambda)y)]}$$

pour $\lambda \in [0, 1]$.

Donc $t(\lambda x + (1-\lambda)y) = t(\lambda x) + t((1-\lambda)y) + 2k(\lambda x, (1-\lambda)y)\pi$ ([5], 9.5.5). t étant continue et W_ε connexe, l'égalité précédente nous prouve que le domaine de valeur de k se réduit à un seul point qui n'est autre que 0 puisque $t(0) = 0$. De là nous déduisons que pour tout entier n, et pour tout $x \in W_\varepsilon$, $t(\frac{1}{n}x) = \frac{1}{n}t(x)$. De même si $x \in W_\varepsilon$ et si pour un entier m, $mx \in W_\varepsilon$ alors, $t(mx) = m\,t(x)$. Supposons maintenant que $x \in W_\varepsilon$ et que les deux entiers m et n sont tels que $m < n$. Alors $\frac{x}{n} \in W_\varepsilon$ et $m \cdot \frac{x}{n} \in W_\varepsilon$, d'où $t(\frac{m}{n}x) = \frac{m}{n}t(x)$. La continuité de t nous prouve enfin que pour tout $x \in W_\varepsilon$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $t(\lambda x) = \lambda\, t(x)$. Revenons à l'égalité $e^{i\chi(x)} = e^{it(x)}$ pour tout $x \in W_\varepsilon$. Elle implique que $\chi(x) = t(x) + 2k(x)\pi$ ([5], 9.5.5). Si $\lambda \in]0, 1[$, comme $\chi(\lambda x) = \lambda\,\chi(x)$ et $t(\lambda x) = \lambda\, t(x)$, nous avons

$$t(\lambda x) + 2k(\lambda x)\pi = t(\lambda x) + 2\,\lambda\, k(x)\pi$$

ce qui montre que $k = 0$.

D'où nous tirons que $n(\rho x) = \rho n(x)$ et que $n=0$ en prenant $\rho \in R - Q$.

Si H est l'espace monoparticulaire, A un opérateur de champ , la transformation de jauge la plus générale de A, est de la forme : $A \longrightarrow A_\chi = A + \chi$ où χ est R - linéaire à valeurs dans R . Pour obtenir une pareille transformation, pour toute représentation de Fock, nous devons trouver un élément de $\alpha(\overline{M_1(H,\sigma)})$ qui transforme δ_ψ en $(\delta_\psi)^\chi = e^{i\chi(\psi)}\,\delta_\psi$, car $\pi((\delta_\psi)^\chi) = \pi(e^{i\chi(\psi)}\delta_\psi) = e^{i[A(\psi)+\chi(\psi)]} = e^{iA_\chi(\psi)} = \pi^\chi(\delta_\psi)$, ce qui justifie le paragraphe suivant .

6.2. Automorphismes de jauge.

6.2.1. Pour tout $\chi \in H'$ l'application $f \longrightarrow f^\chi$ où $f^\chi(\psi) = e^{i\chi(\psi)}\,f(\psi)$ pour tout $\psi \in H$, est un automorphisme de $\mathcal{E}_o(E)$, quelque soit $E \in \mathfrak{S}$.

Cette proposition est immédiate car $\chi \mid E$ est continue.

D'après 2.2.1. et 2.3. , l'automorphisme $f \longrightarrow f^\chi$, induit sur $\overline{M_1(H,\sigma)}$ un automorphisme $\zeta_\chi : \mu \longrightarrow \mu^\chi$. Ce dernier agit sur $\mathcal{M}_1(H,\sigma)$ de la façon suivante : pour tout $\widehat{(\mu_\alpha,E_\alpha)} \in \mathcal{M}_1(H,\sigma)$, $\widehat{(\mu_\alpha,E_\alpha)}^\chi = \widehat{(\mu_\alpha^\chi, E_\alpha)}$, où $\mu_\alpha^\chi(f) = \mu_\alpha(f^\chi)$ quelque soit $f \in \mathcal{E}_o(E_\alpha)$. En particulier nous avons :

6.2.2. Pour tout $\chi \in H'$ et pour tout $\psi \in H$, $(\delta_\psi)^\chi = e^{i\chi(\psi)}\delta_\psi$.

6.2.3. H' étant considéré comme un groupe additif, l'application

$$\left\{ \zeta : \chi \in H' \longrightarrow \zeta_\chi \in \alpha\,(\overline{M_1(H,\sigma)}) \text{ est un monomorphisme.} \right.$$

Supposons que $\zeta_\chi = \zeta_{\chi'}$. Pour tout $\widehat{(\mu_\alpha, E_\alpha)} \in \mathcal{M}_1(H,\sigma)$, $\widehat{(\mu_\alpha^\chi, E_\alpha)} = \widehat{(\mu_\alpha^{\chi'}, E_\alpha)}$, ce qui implique que $\mu_\alpha^\chi = \mu_\alpha^{\chi'}$, c'est-à-dire $\mu_\alpha(f^\chi) = \mu_\alpha(f^{\chi'})$ quelquesoit $f \in \mathcal{E}_o(E_\alpha)$. $M_1(E_\alpha, \sigma)$ séparant $\mathcal{E}_o(E_\alpha)$, $f^\chi = f^{\chi'}$ quelquesoit $f \in \mathcal{E}_o(E_\alpha)$. En tenant compte de 6.1.1. nous avons $\chi|E_\alpha = \chi'|E_\alpha$. E_α étant quelconque dans $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}$ étant absorbant pour H, nous avons $\chi = \chi'$. En outre, sur $\mathcal{M}_1(H,\sigma)$, on voit que $\zeta_{\chi+\chi'} = \zeta_\chi \zeta_{\chi'}$ car $f^{\chi+\chi'} = (f^\chi)^{\chi'} = (f^{\chi'})^\chi$.

Le groupe additif H' sera donc considéré dans la suite, comme un sous groupe (commutatif) du groupe des automorphismes de $\overline{M_1(H,\sigma)}$.

<u>6.3. Automorphismes de jauge implémentables pour une représentation de Fock</u>.

Soit π_s une représentation de Fock particulière. Nous noterons par H^*_s, le sous groupe additif de H' formé des éléments de H' continus pour la norme $\|\psi\| = \sqrt{s(\psi,\psi)}$, $\psi \in H$.

6.3.1. $\left\{ H' \cap \alpha_\pi(\overline{M_1(H,\sigma)}) = H^*_s. \right.$

Autrement dit, nous allons démontrer que ζ_χ est implémentable pour π_s, si et seulement si, $\chi \in H^*_s$. Supposons que ζ_χ soit implémentable pour π_s. D'après 1.1.1. et 2.1.2., il existe un élément unitaire u de

$\overline{M_1(H,\sigma)}$ tel que $\omega_s(u^*\times\delta_\psi\times u) = \omega_s((\delta_\psi)^\chi) = e^{+i\chi(\psi)}\,\Omega'(\psi)$. D'après la remarque de 1.2.2. et d'après 6.1.2. nous voyons que $\chi \in H^*_s$. Réciproquement, supposons que $\chi \in H^*_s$. D'après le théorème de Riesz (voir [4], page89), il existe $\psi_o \in \bar{H}$ tel que $\chi(\psi) = s(\psi_o,\psi)$ pour tout $\psi \in H$. Si nous posons $u = -\frac{1}{2}J\psi_o$, alors $\chi(\psi) = \sigma(2u,\psi)$ et $u \in \bar{H}$. 1.2.3. nous montre que $\pi(\delta_u)$ appartient à $\mathcal{L}(I_{\Omega'})$; donc $\pi(\delta_u)\pi(\mu)\pi(\delta_u)^*$ appartient aussi à $\mathcal{L}(I_{\Omega'})$. Nous allons démontrer que pour tout $\mu \in \mathcal{M}_1(H,\sigma)$, $\pi^\chi(\mu) = \pi(\delta_u)\pi(\mu)\pi(\delta_u)^*$. π étant continue cette égalité s'étendra à $\overline{M_1(H,\sigma)}$. Afin de calculer l'expression $\pi(\delta_u)\pi(\mu)\pi(\delta_u)^*$ nous allons utiliser comme intermédiaire de calcul $\mathcal{M}_1(\bar{H},\sigma)$ et $\mathcal{M}_1(\bar{H},\sigma)_{/N'_\omega}$ où $N'_\omega = \{\mu \in \overline{M_1(\bar{H},\sigma)} \,|\, \omega(\mu^*\times\mu) = 0\}$. Nous savons que $\mathcal{M}_1(H,\sigma) \subset \mathcal{M}_1(\bar{H},\sigma)$ ([1], théorème 22) et que $\mathcal{M}_1(H,\sigma)_{/N_\omega} \subset \mathcal{M}_1(\bar{H},\sigma)_{/N'_\omega}$ car si $\hat{\mu} \in \mathcal{M}_1(H,\sigma)_{/N_\omega}$ et $\bar{\mu} \in \mathcal{M}_1(\bar{H},\sigma)_{/N'_\omega}$, $\|\hat{\mu}\|^2 = \omega(\hat{\mu}^*\times\hat{\mu}) = \omega(\mu^*\times\mu) = \omega(\bar{\mu}^*\times\bar{\mu}) = \|\bar{\mu}\|^2$. Soit π' la représentation régulière gauche de $\mathcal{M}_1(\bar{H},\sigma)$ dans $\mathcal{M}_1(\bar{H},\sigma)_{/N'_\omega}$ et π celle de $\mathcal{M}_1(H,\sigma)$ dans $\mathcal{M}_1(H,\sigma)_{/N_\omega}$. Evidemment, pour tout $\mu \in \mathcal{M}_1(H,\sigma)$, $\pi(\mu) = \pi'(\mu)\,|\,\mathcal{M}_1(H,\sigma)_{/N_\omega}$. Pour tout $\widehat{(\mu_\alpha,E_\alpha)} \in \mathcal{M}_1(H,\sigma)$,

$\pi'(\delta_u)\pi(\widehat{(\mu_\alpha,E_\alpha)})\,\pi'(\delta_u)^*|\mathcal{M}_1(H,\sigma)_{/N_\omega} = \pi'(\delta_u\times\widehat{(\mu_\alpha,E_\alpha)}\times\delta_{-u})|\mathcal{M}_1(H,\sigma)_{/N_\omega} =$
$\pi'(\widehat{(\delta_u\times\mu_\alpha\times\delta_{-u},E_\alpha)})|\mathcal{M}_1(H,\sigma)_{/N_\omega} = \pi(\widehat{(\mu_\alpha^\chi, E_\alpha)}) = \pi^\chi((\mu_\alpha,E_\alpha))$.

R E F E R E N C E S

-:-:-:-:-:-

[1] D. KASTLER : The C*-algebras of a free boson field. I Discussion of Basic Facts. (Commun. math. Phys. 1 , 14-18, (1965)).

[2] D. KASTLER : Introduction à l'Electrodynamique Quantique . Dunod (1961, Paris).

[3] J. DIXMIER : Les C*-algèbres et leurs représentations . Gauthier-Villars (1964, Paris).

[4] M.A. NAÏMARK : Normed Rings - Noordhoff Groningen (The Netherlands, 1959).

[5] J. DIEUDONNE : Fondements de l'analyse moderne . Gauthier-Villars (1963, Paris).

[6] M.H. STONE : On one-parameter unitary groups in Hilbert space. (Ann. of Math. (2) , vol. 33(1932) , p.p. 643-648).

[7] G.F. DELL'ANTONIO , S. DOPLICHER , D. RUELLE : A theorem on Canonical Commutation and Anticommutation Relations. (Commun. math. Phys. 2 , 223 - 230 (1966)) .

PARTIE II

C^*-ALGEBRE DES RELATIONS DE COMMUTATION

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

I - INTRODUCTION

Dans tout ce qui suit, nous noterons $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), le corps des réels (resp. des complexes).

Soit H un espace préhilbertien, σ la partie imaginaire du produit scalaire. σ est une forme symplectique de H, c'est-à-dire, une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire $(\sigma(\alpha\psi + \alpha'\psi', \varphi) = \alpha\sigma(\psi,\varphi) + \alpha'\sigma(\psi',\varphi')$, $\sigma(\psi, \alpha\varphi + \alpha'\varphi') = \alpha\sigma(\psi,\varphi) + \alpha'\sigma(\psi,\varphi')$, pour tout $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ et pour tout $\psi, \psi', \varphi, \varphi' \in H$), antisymétrique $(\sigma(\psi,\varphi) = -\sigma(\varphi,\psi)$ pour tout $\varphi, \psi \in H$) et régulière $(\sigma(\psi,\varphi) = 0$ pour tout $\psi \in H$, implique $\varphi = 0$). Un système de Weyl (ou représentation des relations de commutation) est une application W de H dans le groupe unitaire des opérateurs bornés agissant sur un espace de Hilbert et vérifiant les deux propriétés :

a) $W(\psi)\, W(\varphi) = e^{-i\sigma(\psi,\varphi)}\, W(\psi+\varphi)$ pour tout $\psi, \varphi \in H$

b) $\lambda \in R \to W(\lambda\psi)$ est faiblement (ou fortement) continue pour tout $\psi \in H$.

Nous voyons donc que les systèmes de Weyl ne dépendent que de la structure symplectique de H. Cela nous amène à considérer par la suite un espace symplectique, c'est-à-dire, un espace vectoriel réel H muni d'une forme symplectique σ. Cet espace sera noté (H,σ). Dans certains cas nous serons amenés à considérer des structures préhilbertiennes σ-permises sur (H,σ). Une structure préhilbertienne σ-permise est donnée par un opérateur linéaire J de H vérifiant : $J^2 = -1$, $\sigma(J\psi,J\varphi) = \sigma(\psi,\varphi)$ et $-\sigma(J\psi,\psi) \geq 0$

.../...

pour tout $\psi, \varphi \in H$. Alors en posant $i\psi = J\psi$ où i est le nombre imaginaire pur et $s(\psi,\varphi) = -\sigma(J\psi,\varphi)$ pour tout $\psi,\varphi \in H$, H devient un espace vectoriel complexe et $h = s + i\sigma$ une forme hermitienne non dégénérée de H . (H,h) est donc un espace préhilbertien et la partie imaginaire de h est précisément σ , justifiant ainsi la terminologie.

Le but principal de cet article est de construire une C^*-algèbre associée à un espace symplectique (H,σ) (nous l'appellerons "C^*-algèbre des relations de commutation" et la noterons $\overline{\Delta(H,\sigma)}$) , telle qu'il y ait une bijection entre l'ensemble des systèmes de Weyl de (H,σ) et certaines représentations de $\overline{\Delta(H,\sigma)}$.

Le deuxième chapitre est consacré à la construction de $\overline{\Delta(H,\sigma)}$; le troisième sera consacré aux principales propriétés de cette C^*-algèbre.

Nous étudions dans le quatrième chapitre certains automorphismes de $\overline{\Delta(H,\sigma)}$ ayant un intérêt physique. Une étude analogue a déjà été faite dans [2] . Nous en avons repris les démonstrations, plus simples dans le cadre présent.

2 - DEFINITION DE $\overline{\Delta(H,\sigma)}$

2.1 Préliminaires.

Soit (H,σ) un espace symplectique. Un sous espace vectoriel E de H est dit régulier si σ restreinte à $E \times E$ est régulière. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble de tous les sous espaces vectoriels réguliers de H, de dimension finie.

2.1.1. $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S} \text{ est un système filtrant (i.e. pour tout } E_1, E_2 \in \mathcal{S}, \text{il existe} \\ E_3 \in \mathcal{S} \text{ tel que } E_1 \cup E_2 \subset E_3) \text{ et absorbant (i.e. } H = \bigcup\limits_{E \in \mathcal{S}} E) \text{ de } H. \end{array} \right.$

Cette proposition sera établie quand nous aurons prouvé que pour tout sous espace vectoriel de dimension finie E de H, il existe un élément F de $\mathcal{S}$ tel que $E \subset F$.

Soit E un sous espace vectoriel de dimension finie de H et e_1 un élément de E. Puisque σ est régulière, il existe $f_1 \in H$ tel que $\sigma(e_1,f_1) = 1$; on prendra f_1 dans E si possible. Notons E_1 le sous espace vectoriel de H engendré par le couple (e_1,f_1) et E'_1 le sous espace orthogonal à E_1 (i.e. l'ensemble des $x \in H$ tels que $\sigma(x,e_1) = \sigma(x,f_1) = 0$). Il est clair que E_1 et E'_1 sont réguliers et que $H = E_1 \oplus E'_1$. Montrons que $E = E_1 \cap E \oplus E'_1 \cap E$: si $x \in E$ alors $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E'_1$. Il reste à démontrer que $x_1 \in E$ et $x_2 \in E$. Si $f_1 \in E$, alors $x_1 = \alpha e_1 + \beta f_1$ où $\alpha = \sigma(x_1,f_1)$ et $\beta = \sigma(e_1,x_1)$ ce qui implique $x_1 \in E$ et $x_2 = x-x_1 \in E$. Si $f_1 \notin E$, alors $\sigma(x,e_1) = 0$ et comme $\sigma(x_2,e_1) = 0$ nous en déduisons que $\sigma(x_1,e_1) = 0$ donc $x_1 = \alpha e_1 \in E$ où $\alpha = \sigma(x_1,f_1)$ et $x_2 = x - x_1 \in E$. Si $E'_1 \cap E \neq \{0\}$

nous recommencerons cette construction en prenant E'_1 au lieu de H et $E'_1 \cap E$ au lieu de E. Comme E est de dimension finie, en répétant cette construction un nombre fini de fois nous obtiendrons un élément F de $\mathcal{J}$ (engendré par $e_1, f_1, e_2, f_2, \dots e_n, f_n$) tel que $E \subset F$.

2.2. Définition de $\Delta(H,\sigma)$

Notons $\Delta(H,\sigma)$ l'ensemble des fonctions qui appliquent H dans $\mathbb{C}$ et qui s'annulent sur tous les éléments de H sauf sur un nombre fini d'entre eux.

2.2.1. $\Delta(H,\sigma)$ muni des lois, de l'involution et de la norme suivantes :

$$(a+b)(\psi) = a(\psi)+b(\psi)$$

$$(\alpha.a)(\psi) = \alpha.\ a(\psi)$$

$$(a.b)(\psi) = \sum_{\varphi\in H} a(\varphi)b(\psi-\varphi)e^{-i\sigma(\varphi,\psi)} = \sum_{\varphi\in H} a(\psi-\varphi)b(\varphi)e^{i\sigma(\varphi,\psi)}$$

$$a^*(\psi) = \overline{a(-\psi)}$$

$$\|a\|_1 = \sum_{\varphi\in H} |a(\varphi)|,\ \forall a,\ b\in\Delta(H,\sigma),\ \forall\ \psi\in H\ ,\ \forall\ \alpha\in\mathbb{C},$$

est une algèbre normée involutive.

Les sommes qui interviennent dans les égalités ci-dessus ont un sens car un nombre fini seulement de termes sont non nuls. La proposition est facile à établir ; montrons seulement que $(a.b)^* = b^*.a^*$ et que $\|a.b\|_1 \leq \|a\|_1.\|b\|_1$:

$$(a.b)^*(\psi) = \overline{(a.b)(-\psi)} = \sum_{\varphi} \overline{a(\varphi)}\ \overline{b(-\psi-\varphi)}\ e^{-i\sigma(\varphi,\psi)} = \sum_{\varphi} \overline{a(-\varphi)}\,\overline{b(\varphi-\psi)}e^{i\sigma(\varphi,\psi)}$$

$$= (b^*.a^*)(\psi) \quad \text{et} \quad \|a.b\|_1 = \sum_{\psi\in H} \Big|\sum_{\varphi\in H} a(\varphi)\ b(\psi-\varphi)\ e^{-i\sigma(\varphi,\psi)}\Big| \leq$$

$$\sum_{\psi\in H}\ \sum_{\varphi\in H} |a(\varphi)|\ |b(\psi-\varphi)| \leq \|a\|_1 . \|b\|_1 .$$

Notons δ_ψ l'élément de $\Delta(H,\sigma)$ qui vérifie : $\delta_\psi(\varphi) = 0$ si $\psi \neq \varphi$ et $\delta_\psi(\psi) = 1$.

2.2.2. $\left\{ \begin{array}{l} \delta_\psi . \delta_\varphi = e^{-i\sigma(\psi,\varphi)}\delta_{\psi+\varphi} \text{ ; } \delta_0 \text{ est l'élément neutre de } \Delta(H,\sigma) \text{ ;} \\ (\delta_\psi)^* = \delta_{-\psi} = (\delta_\psi)^{-1} \text{ . De plus l'ensemble } \delta = \{\delta_\psi | \psi \in H\} \text{ est} \\ \text{une base de } \Delta(H,\sigma). \end{array} \right.$

Pour démontrer la première partie de la proposition il suffit d'utiliser les définitions. δ est un système libre car $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{\psi_i} = 0$ $\Longleftrightarrow \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{\psi_i}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| = 0 \Longleftrightarrow \alpha_i = 0$, $i=1, \ldots, n$. δ est un système générateur à cause de la définition même de $\Delta(H,\sigma)$.

2.2.3. $\{$ $\Delta(H,\sigma)$ est simple

Montrons que toute représentation π non dégénérée de $\Delta(H,\sigma)$ est fidèle. A cause de ([3],2.2.7) nous pouvons supposer que π admet un vecteur totalisateur ψ_0. Il est clair que $\pi(\delta_0)$ est l'identité puisque $\pi(\delta_0)\pi(a)\psi_0 = \pi(a)\psi_0$ pour tout $a \in \Delta(H,\sigma)$.Nous allons démontrer par récurrence que $\pi(\delta) = \{\pi(\delta_\psi)|\ \psi \in H\}$ est un système libre. Pour tout $\psi \in H$, $\pi(\delta_\psi) \neq 0$ car $\pi(\delta_{-\psi}) = \pi(\delta_\psi)^{-1}$. Supposons que tous les sous-systèmes de $\pi(\delta)$ de n éléments soient libres et que $\sum_{i=1}^{n+1} a_i \delta_{\psi_i} = 0$.
Cette dernière égalité implique $\pi(\delta_0) = \sum_{i=1}^{n} b_i \delta_{\varphi_i}$ où $\varphi_i = \psi_i - \psi_{n+1}$ et $b_i = -a_i e^{i\sigma(\psi_{n+1},\varphi_i)}$. D'où, pour tout $\psi \in H$, $\pi(\delta_\psi)\pi(\delta_0)\pi(\delta_{-\psi}) = \pi(\delta_0)$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{n} b_i \pi(\delta_{\varphi_i}) = \sum_{i=1}^{n} b_i\, e^{-2i\sigma(\psi,\varphi_i)}\pi(\delta_{\varphi_i})$. L'hypothèse de récurrence implique $e^{-2i\sigma(\psi,\varphi_i)} = 1$ pour tout $\psi \in H$, donc $\varphi_1 = \ldots = \varphi_n = 0$ et $\psi_1 = \ldots = \psi_{n+1}$.

La complétée $\Delta_1(H,\sigma)$ de $\Delta(H,\sigma)$ est une algèbre de Banach involutive. Elle est formée de toutes les fonctions a qui appliquent H dans $\mathbb{C}$ et en vérifiant $\sum_{\psi \in H} |a(\psi)| < +\infty$ (cette dernière condition implique évidemment que a s'annule sur tous les éléments de H sauf sur un sous-ensemble au plus dénombrable d'antre eux).

2.2.4. $\Big\}$ $\Delta_1(H,\sigma) \subset M_1(H,\sigma)$.

Rappelons que $M_1(H,\sigma)$ a été défini dans [1] . Il n'y a pas d'inclusion au sens ensembliste, mais nous allons construire un monomorphisme isométrique de $\Delta_1(H,\sigma)$ dans $M_1(H,\sigma)$. Considérons l'homomorphisme défini par $T : \delta_\psi \in \Delta(H,\sigma) \longrightarrow \delta_\psi \in M_1(H,\sigma)$. C'est cette confusion de notation que nous justifions. Montrons que T est isométrique. Pour tout $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{\psi_i} \in M_1(H,\sigma)$, soit E un élément de $\mathcal{E}$ (ensemble des sous espaces vectoriels de dimension finie et réguliers de H) contenant $\{\psi_1,\dots,\psi_n\}$. Nous savons que $\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{\psi_i}\|_1 = \sup_{\substack{f \in \mathcal{C}_\infty(E) \\ \|f\|_\infty = 1}} |\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\psi_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$. Montrons que cette borne est atteinte.

Posons $\alpha_j = |\alpha_j| e^{i\theta_j}$ pour tout $j = 1,\dots, n$. Considérons une structure préhilbertienne σ-permise quelconque sur E (elles induisent toutes la même topologie puisque $\dim E < +\infty$). E étant maintenant un espace vectoriel topologique séparé nous pouvons construire des voisinages V_j des ψ_j disjoints deux à deux. Soit g_j la fonction continue à valeurs réelles qui est égale à θ_j sur ψ_j et nulle en dehors de V_j ; alors $f_j = e^{-ig_j}$ est une fonction continue telle que $\|f_j\|_\infty = 1$, $f_j(\psi_j) = e^{-i\theta_j}$ et $f_j(\psi) = 1$ si $\psi \notin V_j$. Donc $f = f_1 . f_2 \dots f_n$ est la fonction de $\mathcal{C}_\infty(E)$ telle que $\|f\|_\infty = 1$ et $(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{\psi_i})(f) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$. T est donc bien isométrique. Il s'étend à $\Delta_1(H,\sigma)$ en un monomorphisme isométrique.

2.3. Définition de $\overline{\Delta(H,\sigma)}$.

Soit $\mathcal{R}(H,\sigma)$ l'ensemble des représentations non dégénérées π de $\Delta(H,\sigma)$ vérifiant : $\lambda \in \mathbb{R} \to \pi(\delta_{\lambda\psi})$ est faiblement (ou fortement) continue quel que soit $\psi \in H$.

2.3.1. Pour tout $a \in \Delta(H,\sigma)$, le nombre

$$\|a\| = \sup_{\pi\in\mathcal{R}} \|\pi(a)\|$$

est fini. L'application $a \to \|a\|$ est une norme sur $\Delta(H,\sigma)$ vérifiant : $\|ab\| \leq \|a\|.\|b\|$, $\|a^*\|=\|a\|$ et $\|a^*a\|=\|a\|^2$ quels que soient $a, b \in \Delta(H,\sigma)$

Nous avons déjà vu dans 2.2.3. que pour toute représentation π non dégénérée de $\Delta(H,\sigma)$ et pour tout $\psi \in H$, $\pi(\delta_\psi)$ est unitaire ; par conséquent $\|\pi(\delta_\psi)\| = 1$. Ceci implique , pour tout $\sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{\psi_i} \in \Delta(H,\sigma)$, $\|\pi (\sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{\psi_i})\| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| = \| \sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{\psi_i}\|_1 < +\infty$. L'application $a \to \|a\|$ est une norme sur $\Delta(H,\sigma)$ (2.2.3). Comme pour tout $\pi \in \mathcal{R}(H,\sigma)$, nous avons $\|\pi(a^*)\| = \|\pi(a)\|$ et $\|\pi(a^*a)\| = \|\pi(a)\|^2$ nous en déduisons : $\|a^*\| = \|a\|$ et $\|a^*a\| = \|a\|^2$. De plus, quel que soit $\pi \in \mathcal{R}(H,\sigma)$, $\|\pi(a.b)\| \leq \|\pi(a)\|.\|\pi(b)\| \leq \|a\|.\|b\|$; donc $\|a.b\| \leq \|a\|.\|b\|$.

Il est clair que l'algèbre $\overline{\Delta(H,\sigma)}$ complétée de $\Delta(H,\sigma)$ pour la norme définie dans 2.3.1. est une C^*-algèbre. Elle est appelée : "C^*-algèbre des relations de commutation". La raison en apparaitra au paragraphe suivant.

Si $\pi \in \mathcal{R}(H,\sigma)$, $\|\pi(a)\|\leq\|a\|$ quel que soit $a \in \Delta(H,\sigma)$. Par conséquent il existe une représentation unique π' de $\overline{\Delta(H,\sigma)}$ telle que $\pi'|\Delta(H,\sigma) = \pi$. Pour cela dans tout ce qui va suivre nous supposerons que les éléments de $\mathcal{R}(H,\sigma)$ sont définis sur $\overline{\Delta(H,\sigma)}$.

3 - PROPRIETES DE $\overline{\Delta(H,\sigma)}$

3.1. Représentations des relations de commutation.

Soit $\mathcal{W}(H,\sigma)$ l'ensemble des systèmes de Weyl de (H,σ).

3.1.1. Pour tout $\pi \in \mathcal{R}(H,\sigma)$, l'application W définie par $W(\psi) = \pi(\delta_\psi)$ pour tout $\psi \in H$, est un élément de $\mathcal{W}(H,\sigma)$.

Cette proposition se déduit immédiatement des définitions de $\mathcal{R}(H,\sigma)$ et $\mathcal{W}(H,\sigma)$. Réciproquement nous avons

3.1.2. Quel que soit $W \in \mathcal{W}(H,\sigma)$, il existe un et un seul élément π de $\mathcal{R}(H,\sigma)$ qui vérifie : $\pi(\delta_\psi) = W(\psi)$ pour tout $\psi \in H$.

Unicité : s'il existe $\pi \in \mathcal{R}(H,\sigma)$ vérifiant $\pi(\delta_\psi) = W(\psi)$ alors, pour tout $\sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{\psi_i} \in \Delta(H,\sigma)$, $\pi(\sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{\psi_i}) = \sum_{i=1}^{n} a_i W(\psi_i)$ ce qui implique l'unicité de π.

Existence : pour tout $\sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{\psi_i} \in \Delta(H,\sigma)$ (où $\psi_i \neq \psi_j$ si $i \neq j$), l'application π définie par $\pi(\sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{\psi_i}) = \sum_{i=1}^{n} a_i W(\psi_i)$ est un élément de $\mathcal{R}(H,\sigma)$. En effet, l'égalité ci-dessus définit bien π car les δ_ψ sont linéairement indépendants. Les propriétés $\pi(a+b) = \pi(a)+\pi(b)$ et $\pi(a.b) = \pi(a).\pi(b)$ pour tout $a,b \in \Delta(H,\sigma)$ se déduisent de la définition de π , valable même si les ψ_i , $i \in \{1,2,..,n\}$, ne sont pas tous différents $\pi(\alpha\delta_\psi + \beta\delta_\psi) = \pi((\alpha+\beta)\delta_\psi) = (\alpha+\beta)W(\psi) = \alpha W(\psi) + \beta W(\psi)$, pour tout $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ et $\psi \in H$. La propriété $\pi(\alpha a) = \alpha\pi(a)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et $a \in \Delta(H,\sigma)$ est évidente. Enfin , $\pi(a)^* = \pi(a^*)$ quel que soit $a \in \Delta(H,\sigma)$ car $W(\psi)^* = W(-\psi)$; en effet, par définition même de $\mathcal{W}(H,\sigma)$, $W(\psi)\, W(-\psi) = W(-\psi)\, W(\psi) = W(0)$

qui est l'identité, puisque dans le groupe unitaire $W(0)\ W(0) = W(0)$.

Ces deux dernières propositions réalisent une bijection entre $\mathcal{R}(H,\sigma)$ et $\mathcal{W}(H,\sigma)$ qui à $\pi \in \mathcal{R}(H,\sigma)$ fait correspondre $W_\pi \in \mathcal{W}(H,\sigma)$ définie par $W_\pi(\psi) = \pi(\delta_\psi)$. On voit aisément que

3.2.3. $\left\{\begin{array}{l}\text{Pour tout } \pi \in \mathcal{R}(H,\sigma),\ \pi \text{ est cyclique (resp. irréductible)} \\ \text{si et seulement si } W_\pi \text{ est cyclique (resp. irréductible).}\end{array}\right.$

Au lieu des systèmes de Weyl de (H,σ) nous sommes donc ramenés à étudier les représentations π de $\overline{\Delta(H,\sigma)}$ telles que $\lambda \in \mathbb{R} \to \pi(\delta_{\lambda\psi})$ soit continue pour tout $\psi \in H$ (i.e. $\pi \in \mathcal{R}(H,\sigma)$).

3.2. Formes positives de $\overline{\Delta(H,\sigma)}$.

Soit $\mathcal{F}$, l'ensemble de toutes les fonctions f appliquant H dans $\mathbb{C}$ et vérifiant $\sum_{k,j=1}^{n} \bar{a}_k a_j e^{i\sigma(\psi_k,\psi_j)} f(\psi_j-\psi_k) \geq 0$ pour tout $a_k \in \mathbb{C}$, $\psi_k \in H$, $k \in \{1,2,\dots n\}$ et $n \in N$.

3.2.1. $\left\{\begin{array}{l}\text{Pour tout } f \in \mathcal{F}, \text{ il existe une forme positive continue unique} \\ \omega_f, \text{ telle que } \omega_f(\delta_\psi) = f(\psi) \text{ pour tout } \psi \in H.\end{array}\right.$

Unicité : s'il existe une forme positive ω_f de $\Delta(H,\sigma)$ telle que $\omega_f(\delta_\psi) = f(\psi)$ alors, pour tout $\sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{\psi_i} \in \Delta(H,\sigma)$, $\omega_f(\sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{\psi_i}) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(\psi_i)$ ce qui implique l'unicité de ω_f.

Existence : pour tout $\sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{\psi_i} \in \Delta(H,\sigma)$ où $\psi_j \neq \psi_i$ si $j \neq i$), l'application ω_f (qui applique $\Delta(H,\sigma)$ dans $\mathbb{C}$) définie par $\omega_f(\sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{\psi_i}) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(\psi_i)$ est une forme positive continue. En effet, l'égalité ci-dessus définit bien ω_f car les δ_ψ sont linéairement indépendants. La propriété $\omega_f(a+b) = \omega_f(a)+\omega_f(b)$ pour tout $a,b \in \Delta(H,\sigma)$ **résulte de la définition de ω_f valable même si les ψ_i, $i \in \{1,2,\dots n\}$, ne sont pas tous distincts** : $\omega_f(\alpha\delta_\psi+\beta\delta_\psi) = \omega_f((\alpha+\beta)\delta_\psi) = (\alpha+\beta)f(\psi) = \alpha f(\psi)+\beta f(\psi)$.

La propriété $\omega_f(\alpha a) = \alpha\,\omega_f(a)$ est évidente. ω_f est une forme positive puisque $\omega_f\left(\left(\sum_{i=1}^n a_i\delta_{\psi_i}\right)^*\left(\sum_{i=1}^n a_i\delta_{\psi_i}\right)\right) = \omega_f\left(\sum_{k,j=1}^n \overline{a}_k a_j e^{i\sigma(\psi_k,\psi_j)}\delta_{\psi_j-\psi_k}\right)$

$= \sum_{k,j=1}^n \overline{a}_k a_j e^{i\sigma(\psi_k,\psi_j)} f(\psi_j-\psi_k)$ et puisque $f \in \mathfrak{F}$. ([3], 2.1.2, (3) et (4)) impliquent $\overline{f(\psi)} = f(-\psi)$ et $|f(\psi)| \leq f(0)$ pour tout $\psi \in H$. Cette dernière inégalité prouve la continuité de ω_f car

$$\left|\omega_f\left(\sum_{i=1}^n a_i\delta_{\psi_i}\right)\right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|.|f(\psi_i)| \leq f(0).\left\|\sum_{i=1}^n a_i\delta_{\psi_i}\right\|_1.$$

Pour tout $f \in \mathfrak{F}$ soit π_f la représentation associée à ω_f par la construction de Guelfand - Naimark ([3], 2.4.4.).

3.2.2? Soit f un élément de $\mathfrak{F}$; pour que $\pi_f \in \mathcal{R}(H,\sigma)$ il faut et il suffit que l'application $\lambda \in \mathbb{R} \to f(\lambda\psi+\varphi)$ soit continue quels que soient $\psi,\varphi \in H$. Alors, ω_f peut être étendue en une forme positive de $\overline{\Delta(H,\sigma)}$

Si $\pi_f \in \mathcal{R}(H,\sigma)$, alors l'application $\lambda \in \mathbb{R} \to e^{i\lambda\sigma(\psi,\varphi)}$ $(\hat{\delta}_o|\pi_f(\delta_{\lambda\psi})\,\hat{\delta}_\varphi = f(\lambda\psi+\varphi)$ est continue pour tout $\varphi,\psi \in H$ (rappelons que $\hat{a}$ est l'image canonique de $a \in \Delta(H,\sigma)$ dans l'espace de représentation H_{π_f} de π_f). Réciproquement supposons que l'application $\lambda \in \mathbb{R} \to f(\lambda\psi+\varphi)$ soit continue pour tout $\psi,\varphi \in H$. Quel que soit $\mu \in H_{\pi_f}$ nous savons qu'il existe un élément $a = \sum_{i=1}^n a_i\delta_{\psi_i} \in \Delta(H,\sigma)$ tel que $\left\|\sum_{i=1}^n a_i\hat{\delta}_{\psi_i} - \mu\right\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$.

Donc $\|\pi_f(\delta_{\lambda\psi})\mu-\mu\| \leq 2\,\|\mu-\hat{a}\| + \|\pi_f(\delta_{\lambda\psi})\,\hat{a}-\hat{a}\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\{\omega_f(a^*a) - \mathcal{Re}\,\omega_f(a^*\delta_{\lambda\psi}a)\} = \frac{\varepsilon}{2} - 2\{\sum_{k,j=1}^{n} \bar{a}_k a_j e^{i\sigma(\psi_k,\psi_j)} f(\psi_j-\psi_k) - \sum_{k,j=1}^{n} \bar{a}_k a_j e^{i\sigma(\psi_k,\psi_j)} e^{i\lambda\sigma(\psi_k+\psi_j,\psi)} f(\lambda\psi+\psi_j-\psi_k\}$ qui peut-être majoré par ε en choisissant λ suffisamment petit, d'après l'hypothèse. La dernière partie de la proposition résulte du fait que $\omega_f(a) = (\hat{\delta}_o|\pi_f(a)\,\hat{\delta}_o)$ pour tout $a \in \Delta(H,\sigma)$ et de 2.2.

Notons $\mathfrak{F}_o$ l'ensemble des éléments $f \in \mathfrak{F}$ tels que $\pi_f \in \mathcal{R}$.

3.2.3. Pour toute structure préhilbertienne σ-permise de (H,σ), pour tout opérateur hermitien (pour la structure préhilbertienne choisie) B de H et pour tout $f \in \mathfrak{F}_o$, l'application $\lambda \in \mathbb{R} \to \pi_f(\delta_{e^{i\lambda B}\psi})$ (resp. $\psi \in H \to \pi_f(\delta_\psi)$) est faiblement (ou fortement) continue quelque soit $\psi \in H$, si et seulement si l'application $\lambda \in \mathbb{R} \to f(e^{i\lambda B}\psi+\varphi)$ (resp. f) est continue pour tout $\varphi,\psi \in H$.

La démonstration de cette proposition est tout-à-fait analogue à celle de 3.2.2.

Notons $\mathfrak{F}_B$ (resp $\mathfrak{F}'$) l'ensemble des éléments f de $\mathfrak{F}_o$ tels que l'application $\lambda \in \mathbb{R} \to f(\lambda\psi+\varphi)$ (resp. f) soit continue quels que soient $\psi,\varphi \in H$. Evidemment $\mathfrak{F}' \subset \mathfrak{F}_A \subset \mathfrak{F}_o \subset \mathfrak{F}$. Les représentations associées aux éléments de $\mathfrak{F}_o$, sont toutes les représentations cycliques des relations de commutation.

Considérons une structure préhilbertienne σ-permise particulière de (H,σ) et soit s la partie réelle du produit scalaire correspondant. Soit f_s la fonction définie par $f_s(\psi) = e^{-\frac{1}{2} s(\psi,\psi)}$ pour tout $\psi \in H$. Il est démontré dans [1] que $f_s \in \mathcal{F}'$. La représentation π_{f_s} (notée aussi π_s) est appelée " représentation de Fock" (ou "représentation de Schrödinger" si $\dim H < +\infty$). On sait que π_s est irréductible, ou, ce qui est équivalent, ω_{f_s} (notée aussi ω_s) est un état pur.

Supposons que $\dim H < +\infty$. J. von Neumann a démontré que toutes les représentations $\pi \in \mathcal{R}(H,\sigma)$ sont des sommes directes de représentations unitairement équivalentes à π_s [11]. Ceci implique : que pour tout $x \in H$ et tout $\pi \in \mathcal{R}(H,\sigma)$, $\|\pi(x)\| = \|\pi_s(x)\| = \|x\|$ et toutes les représentations de Schrödinger sont unitairement équivalentes.

Dans le cas où la dimension de H est infinie nous pouvons avoir des représentations de Fock non unitairement équivalentes.

3.3. $\overline{\Delta(H,\sigma)}$ est limite inductive de C^*-algèbres.

Le système $\mathcal{S}$ étant absorbant il est évident que

$$\Delta(H,\sigma) = \bigcup_{E \in \mathcal{S}} \Delta(E,\sigma).$$

3.3.1. { Pour tout $E \in \mathcal{S}$, $\overline{\Delta(E,\sigma)} \subset \overline{\Delta(H,\sigma)}$.

Comme $\Delta(E,\sigma) \subset \Delta(H,\sigma)$, pour établir la proposition il suffit de prouver que la norme de $\overline{\Delta(H,\sigma)}$ (notée $\|\alpha\|$) restreinte à $\Delta(E,\sigma)$ est la même que celle de $\overline{\Delta(E,\sigma)}$ (notée $\|\alpha\|_E$). Pour tout $\pi \in \mathcal{R}(H,\sigma)$, il est clair que $\pi_E = \pi|\Delta(E,\sigma) \in \mathcal{R}(E,\sigma)$. Or, d'après 3.2., pour tout $a \in \Delta(E,\sigma)$, $\|\pi(a)\| = \|\pi_E(a)\| = \|a\|_E$ ce qui prouve: $\|a\| = \sup_{\pi \in \mathcal{R}(H,\sigma)} \|\pi(a)\| = \|a\|_E$.

De 3.3.1. il résulte que si E et F sont deux éléments de $\mathcal{S}$ tels que $E \subset F$, alors $\overline{\Delta(E,\sigma)} \subset \overline{\Delta(F,\sigma)}$. En outre, pour tout $\pi \in \mathcal{R}(H,\sigma)$ et tout $a \in \Delta(H,\sigma)$, $\|a\| = \|\pi(a)\|$. Cette dernière conséquence nous montre que $\overline{\Delta(H,\sigma)} \subset \overline{M_1(H,\sigma)}$ (2.2.4 et [1]).

3.3.2. { $\overline{\Delta(H,\sigma)}$ est la limite inductive de l'ensemble de C^*-algèbres $\{\overline{\Delta(E,\sigma)} \mid E \in \mathcal{S}\}$.

La notion de limite inductive a été définie dans [5]. Pour établir cette proposition, il suffit de remarquer que

$$\Delta(H,\sigma) = \bigcup_{E \in \mathcal{S}} \Delta(E,\sigma) \subset \bigcup_{E \in \mathcal{S}} \overline{\Delta(E,\sigma)} \subset \overline{\Delta(H,\sigma)}$$ (3.3.1. et 2.1.1) ce qui prouve que $\overline{\Delta(H,\sigma)}$ est la complétion de $\bigcup_{E \in \mathcal{S}} \overline{\Delta(E,\sigma)}$.

3.3.3. { $\overline{\Delta(H,\sigma)}$ n'est pas séparable.

Soit π_s une représentation de Fock particulière de $\Delta(H,\sigma)$. Pour tout $\psi \in H$ et non nul, $\|\delta_0 - \delta_\psi\|^2 = \|\pi_s(\delta_0 - \delta_\psi)\|^2 =$

$$\sup_{a \in \Delta(H,\sigma)} \frac{\omega_s(a^*(\delta_0-\delta_{-\psi})(\delta_0-\delta_\psi)a)}{\omega_s(a^*a)} \geq 2 \sup_{\varphi \in H} \{1 - \mathrm{Re}\, e^{2i\sigma(\psi,\varphi)} e^{-\frac{1}{2}s(\psi,\psi)}\} \geq 2 .$$

Donc l'ensemble des boules ouvertes de centre δ_ψ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$ quand ψ parcourt H, forme un ensemble non dénombrable d'ouverts de $\overline{\Delta(H,\sigma)}$ deux à deux disjoints. Ceci prouve que $\overline{\Delta(H,\sigma)}$ n'est pas séparable.

3.3.4. {Pour toute structure préhilbertienne σ-permise et pour toute représentation π de $\overline{\Delta(H,\sigma)}$ telle que $\psi \longrightarrow \pi(\delta_\psi)$ soit faiblement continue, nous avons :

$$\pi\left(\overline{\Delta(H,\sigma)}\right)'' = \pi\left(\overline{\Delta(\overline{H},\sigma)}\right)'' \quad \text{où } \overline{H} \text{ est la complétée de } H .$$

Si $\psi \in \overline{H} - H$, $\pi(\delta_\psi)$ peut être approché (pour la topologie faible), d'après l'hypothèse, par des éléments de la forme $\pi(\delta_\varphi)$. Par conséquent $\pi(\Delta(H,\sigma))$ est dense dans $\pi(\Delta(\overline{H},\sigma))$, ce qui établit la proposition.

3.4. Décomposition de $\overline{\Delta(H,\sigma)}$ en produit tensoriel.

Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux C^*-algèbres, $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ leur produit tensoriel algèbrique ($\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ est donc une algèbre involutive), π_1 et π_2 deux représentations fidèles de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ respectivement. Pour tout $\sum_{i=1}^{n} a_i \times b_i \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, posons $\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \times b_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \pi_1(a_i) \times \pi_2(b_i) \right\|$.

Il est clair que l'application $\alpha \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \longmapsto \|\alpha\|$ est une norme et que l'algèbre $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ complétée de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ pour cette norme, est une C^*-algèbre. T. Turumaru (Tôhoku Math. Journ., 4, 242 (1953)) et A. Wulfsohn (Bull. Sci. Math., 87, 13 (1963)) ont montré que cette norme est indépendante du choix de π_1 et π_2.

Deux sous espaces vectoriels réguliers E et F de H seront dits orthogonaux, si pour tout $\psi \in E$ et tout $\varphi \in F$, $\sigma(\psi,\varphi) = 0$. Ceci implique évidemment $E \cap F = \{ 0 \}$. Remarquons en outre que $E \oplus F$ est régulier.

3.4.1 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } E \text{ et } F \text{ sont deux sous espaces vectoriels réguliers et ortho-} \\ \text{gonaux de } H \text{ , alors } \overline{\Delta(E \oplus F,\sigma)} = \overline{\Delta(E,\sigma)} \otimes \overline{\Delta(F,\sigma)} \text{ .} \end{array} \right.$

Tout d'abord, il est évident que l'application

$$\gamma : \sum_{i=1}^{n} a_i \, \delta_{\psi_i+\varphi_i} \in \Delta(E \oplus F,\sigma) \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \, \delta_{\psi_i} \times \delta_{\varphi_i} \in \Delta(E,\sigma) \times \Delta(F,\sigma) ,$$

est un isomorphisme algébrique. Il suffit donc de démontrer que γ est une isométrie puisque $\Delta(E \oplus F,\sigma)$ et $\Delta(E,\sigma) \times \Delta(F,\sigma)$ sont denses respectivement dans $\overline{\Delta(E \oplus F,\sigma)}$ et $\overline{\Delta(E,\sigma)} \otimes \overline{\Delta(F,\sigma)}$. Pour pouvoir calculer les normes des éléments des deux algèbres, nous allons construire des représentations de Fock particulières de $\Delta(E \otimes F,\sigma)$, de $\Delta(E,\sigma)$ et de $\Delta(F,\sigma)$. Soit J_1 (resp. J_2) un opérateur définissant une structure préhilbertienne σ - permise de E (resp. F) . L'opérateur $J = J_1 \oplus J_2$ $(J(\psi \oplus \varphi) = J_1\psi \oplus J_2\varphi$ pour tout $\psi \oplus \varphi \in E \oplus F)$, définit une structure préhilbertienne σ - permise de $E \oplus F$; si s est la partie réelle du produit scalaire, elle est telle que : $\psi \in E$ et $\varphi \in F$ implique $s(\psi,\varphi) = 0$. Posons $s_1 = s|E$ et $s_2 = s|F$; pour tout $\psi \oplus \varphi$ et $\psi' \oplus \varphi' \in E \oplus F$, nous avons :

$$s\,(\psi \oplus \varphi \,,\, \psi' \oplus \varphi') = s_1(\psi,\psi') + s_2(\varphi,\varphi').$$

Soit π_s (resp. π_{s_1} , π_{s_2}) la représentation de Fock de $E \oplus F$ (resp. E,F) et H_s (resp. H_{s_1} , H_{s_2}) l'espace de représentation de π_s (resp. π_{s_1}, π_{s_2}) , les éléments de H_s images canoniques des éléments de $\Delta(E \oplus F,\sigma)$ (resp. $\Delta(E,\sigma)$, $(\Delta(F,\sigma))$ (voir la construction de Guelfand - Naimark ([3] , 2.4.4)) seront notés

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \, \widehat{\delta_{\psi_i+\varphi_i}} \quad \left(\text{resp. } \sum_{i=1}^{n} a_i \, \hat{\delta}^1_{\psi_i} \, , \, \sum_{i=1}^{n} a_i \, \hat{\delta}^2_{\varphi_i}\right).$$

Nous allons prouver que H_s est isomorphe à $H_{s_1} \otimes H_{s_2}$; il suffit pour cela de montrer que l'application

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \widehat{\delta_{\psi_i \oplus \varphi_i}} \in H_s \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \hat{\delta}^1_{\psi_i} \otimes \hat{\delta}^2_{\varphi_i} \in H_{s_1} \otimes H_{s_2}$$

est une isométrie. En effet :

$$\| \sum_{i=1}^{n} a_i \widehat{\delta_{\psi_i+\varphi_i}} \|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{a}_i a_j \omega_s (\delta^*_{\psi_i+\varphi_i} \cdot \delta_{\psi_j+\varphi_j}) =$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \bar{a}_i a_j e^{i\sigma(\psi_i,\psi_j)} e^{-\frac{1}{2}s(\psi_i-\psi_j,\psi_i-\psi_j)}$$

$$e^{i\sigma(\varphi_i,\varphi_j)} e^{-\frac{1}{2}s(\varphi_i-\varphi_j,\varphi_i-\varphi_j)} =$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \bar{a}_i a_j \omega_{s_1}(\delta^*_{\psi_i} \delta_{\psi_j}) \omega_{s_2}(\delta^*_{\varphi_i} \delta_{\varphi_j}) =$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \bar{a}_i a_j (\hat{\delta}^1_{\psi_i} \otimes \hat{\delta}^2_{\varphi_i} \mid \hat{\delta}^1_{\psi_j} \otimes \hat{\delta}^2_{\varphi_j}) =$$

$$\| \sum_{i=1}^{n} a_i \hat{\delta}^1_{\psi_i} \otimes \hat{\delta}^2_{\varphi_j} \|^2 .$$

Le caractère isométrique de γ se déduit immédiatement de :

$$\| \pi_s \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{\psi_i+\varphi_i} \right) \left(\widehat{\sum_{j=1}^{m} b_j \delta_{\psi'_j+\varphi'_j}} \right) \| =$$

$$\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j \widehat{\delta_{\psi'_j+\psi_i+\varphi'_j+\varphi_i}} \| =$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i\, b_j\, \widehat{\delta_{\psi'_j+\psi_i}}^{1} \otimes \widehat{\delta_{\varphi'_j+\varphi_i}}^{2} \right\| =$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i\, b_j\, \pi_{s_1}(\delta_{\psi_i})\, \widehat{\delta_{\psi'_j}}^{1} \otimes \pi_{s_2}(\delta_{\varphi_i})\widehat{\delta_{\varphi'_j}}^{2} \right\| =$$

$$\left\| \left[\sum_{i=1}^{n} a_i\, \pi_{s_1}(\delta_{\psi_i}) \otimes \pi_{s_2}(\delta_{\varphi_i})\right] \left(\sum_{j=1}^{m} b_j\, \widehat{\delta_{\psi'_j}}^{1} \otimes \widehat{\delta_{\varphi'_j}}^{2}\right) \right\|$$

Un sous ensemble $\{(e_i,f_i) \mid i \in I\}$ de $H \times H$ est dit symplectique si $\sigma(e_i,f_i) = 1$ pour tout $i \in I$ et $\sigma(e_i,e_j) = \sigma(f_i,f_j) = \sigma(e_i,f_j) = 0$ si $i \neq j$. Si de plus l'ensemble $\bigcup_{i \in I} \{e_i,f_i\}$ est une base de H nous dirons que c'est une base symplectique.

3.4.2. Si H admet une base symplectique $\{(e_i,f_i) \mid i \in I\}$, $\overline{\Delta(H,\sigma)}$ se décompose en un produit infini de C^*-algèbres.

La notion de produit infini de C^*-algèbres a été défini dans [5]. Notons $E_{(i_1,i_2,\dots,i_p)}$ l'espace vectoriel engendré par $\{e_{i_1},f_{i_1},\dots,e_{i_p},f_{i_p}\}$; évidemment $E_{(i_1,i_2,\dots,i_p)} = E_{i_1} \oplus E_{i_2} \oplus \dots \oplus E_{i_p}$.
Soit $\mathcal{S}'$ le sous ensemble de $\mathcal{S}$ formé par les sous espaces vectoriels $E_{(i_1,i_2,\dots i_p)}$ de H, $(i_1,i_2,\dots,i_p)$ parcourant l'ensemble des parties finies de I. Puisque $\bigcup_{i\in I}\{e_i,f_i\}$ est une base, il est évident que $\mathcal{S}'$ est un système filtrant, absorbant de H. Par une démonstration analogue à celle de 3.3.2, on montre aisément que $\overline{\Delta(H,\sigma)}$ est limite inductive des C^*-algèbres $\{\overline{\Delta(E,\sigma)} \mid E \in \mathcal{S}'\}$. La proposition se déduit immédiatement de l'égalité $\overline{\Delta(E_{(i_1,i_2,\dots,i_p)},\sigma)} = \overline{\Delta(E_{i_1},\sigma)} \otimes \dots \otimes \overline{\Delta(E_{i_p},\sigma)}$ (3.4.1 et [5]).

4 - AUTOMORPHISMES ET ANTIAUTOMORPHISMES DE $\overline{\Delta(H,\sigma)}$

4.1. Etude de $S(H,\sigma)$:

Nous appellerons opérateur symplectique de (H,σ), un opérateur linéaire surjectif T de H vérifiant :

(1) $$\sigma(T\psi,T\varphi) = \sigma(\psi,\varphi) \quad \text{pour tout } \psi, \varphi \in H .$$

Notons $S(H,\sigma)$, l'ensemble des opérateurs symplectiques de (H,σ). Il est évident que pour tout $T \in S(H,\sigma)$, $T^{-1} \in S(H,\sigma)$ (grâce à (1), T est injectif, donc inversible). Comme de plus l'opérateur identité I est symplectique, $S(H,\sigma)$ est un groupe multiplicatif.

4.1.1. Pour tout $T \in S(H,\sigma)$, l'application $\underline{\tau_T} : \delta_\psi \longrightarrow \delta_{T\psi}$ peut s'étendre en un automorphisme unique de $\Delta(H,\sigma)$.

Posons par définition

$$\tau_T \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \, \delta_{\psi_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \delta_{T\psi_i}$$

Cette application est un automorphisme isométrique de $\Delta(H,\sigma)$ car :

$$\tau_T \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \, \delta_{\psi_i} \cdot \sum_{j=1}^{m} b_j \, \delta_{\varphi_j} \right) =$$

$$\tau_T \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \, b_j \, e^{-i\sigma(\psi_i,\varphi_j)} \, \delta_{\psi_i+\varphi_j} \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \, b_j \, e^{-i\sigma(T\psi_i,T\varphi_j)} \, \delta_{T\psi_i+T\varphi_j} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \, \delta_{T\psi_i} \cdot \sum_{j=1}^{m} b_j \, \delta_{T\varphi_j} = \tau_T \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \, \delta_{\psi_i} \right) \cdot \tau_T \left(\sum_{j=1}^{m} b_j \, \delta_{\varphi_j} \right)$$

$$-\tau_T \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \, \delta_{\psi_i} \right)^* = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i \, \delta_{-T\psi_i} = \tau_T \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \, \delta_{\psi_i} \right)^* \right) .$$

$$-\tau_T^{\;-1} = \tau_{T-1} \quad \text{(évident)} .$$

$$-\left\| \tau_T \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \, \delta_{\psi_i} \right) \right\|_1 = \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \, \delta_{T\psi_i} \right\|_1 =$$

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| = \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{\psi_i} \right\|_1 .$$

Pour montrer que τ_T est isométrique pour la norme de $\overline{\Delta(H,\sigma)}$ il suffit de remarquer que si $\pi \in \mathcal{R}$, $\pi \circ \tau_T \in \mathcal{R}$. En effet : pour tout

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \, \delta_{\psi_i} \in \Delta(H,\sigma) ,$$

$$\left\| \tau_T \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \, \delta_{\psi_i} \right) \right\| = \left\| (\pi \circ \tau_T) \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \, \delta_{\psi_i} \right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \, \delta_{\psi_i} \right\|$$

(voir démonstration de 3.3.1) . τ_T s'étend donc en un automorphisme unique de $\overline{\Delta(H,\sigma)}$ que nous continuons à noter τ_T .

Soit $\alpha(\overline{\Delta(H,\sigma)})$ le groupe des automorphismes de $\overline{\Delta(H,\sigma)}$.

4.1.2. $\left\{\text{L'application } \tau : T \in S(H,\sigma) \longmapsto \tau_T \in \alpha(\overline{\Delta(H,\sigma)}) \text{ est un mono-morphisme.}\right.$

Si $T \neq T'$, il existe $\psi \in H$ tel que $T\psi \neq T'\psi$ ce qui implique

$$\tau_T(\delta_\psi) = \delta_{T\psi} \neq \tau_{T'}(\delta_\psi) = \delta_{T'\psi}$$

d'où $\tau_T \neq \tau_{T'}$. De plus, pour tout $a = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{\psi_i} \in \Delta(H,\sigma)$

et pour tout T , $T' \in S(H,\sigma)$,

$$(\tau_T \cdot \tau_{T'})(a) = \tau_T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{T'\psi_i}\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{TT'\psi_i} = \tau_{TT'}(a) \quad \text{et} \quad \tau_I(a) = a \qquad .$$

$S(H,\sigma)$ sera donc considéré comme un sous-groupe multiplicatif de $\alpha(\overline{\Delta(H,\sigma)})$. Remarquons que pour toute structure préhilbertienne σ - permise définie par J , le groupe $S^J(H,\sigma)$ des opérateurs unitaires est un sous-groupe de $S(H,\sigma)$. Dans ([2] , 2.5) on peut voir un exemple de sous groupe de $S^J(H,\sigma)$.

<u>4.2 Etude de $AS(H,\sigma)$</u> :

Nous appellerons opérateur antisymplectique de (H,σ) , un opérateur linéaire surjectif T de H vérifiant :

$$\sigma(T\psi , T\varphi) = - \sigma(\psi,\varphi) \qquad \text{pour tout } \psi , \varphi \in H \quad .$$

Notons $AS(H,\sigma)$, l'ensemble des opérateurs antisymplectiques de (H,σ) . Il est évident que pour tout $T \in AS(H,\sigma)$, $T^{-1} \in AS(H,\sigma)$ et que

$S(H,\sigma) \cup AS(H,\sigma)$ est un groupe.

Nous dirons que ζ est un antiautomorphisme de $\overline{\Delta(H,\sigma)}$ si ζ est une bijection de $\overline{\Delta(H,\sigma)}$ vérifiant :

$$\zeta(\alpha a + \beta b) = \overline{\alpha}\, \zeta(a) + \overline{\beta}\, \zeta(b) ,$$

$$\zeta(a.b) = \zeta(a)\, \zeta(b)$$

et

$$\zeta(a)^* = \zeta(a^*)$$

pour tout $a , b \in \overline{\Delta(H,\sigma)}$ et $\alpha , \beta \in \mathbb{C}$.

Notons $A - \alpha(\overline{\Delta(H,\sigma)})$ l'ensemble des antiautomorphismes de $\overline{\Delta(H,\sigma)}$.

4.2.1 Pour tout $T \in AS(H,\sigma)$, l'application $\tau_T : \delta_\psi \longrightarrow \delta_{T\psi}$ peut s'étendre en un antiautomorphisme unique de $\overline{\Delta(H,\sigma)}$.

Posons par définition $\tau_T \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{\psi_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \overline{a}_i \delta_{T\psi_i}$ et la démonstration de 4.2.1 se fait de façon analogue à celle de 4.1.1 .

4.2.2 L'application

$$\tau : T \in S(H,\sigma) \cup AS(H,\sigma) \longrightarrow \tau_T \in \alpha(\overline{\Delta(H,\sigma)}) \cup A - \alpha(\overline{\Delta(H,\sigma)})$$

est un monomorphisme.

Cette proposition se démontre de la même façon que 4.1.2 .

Dans ([2],3.3.) on peut voir un exemple de sous ensemble de $AS(H,\sigma)$.

4.3 Groupe d'automorphismes associé à un opérateur hermitien de H :

Ce paragraphe généralise légèrement ([2],5) . Soit i un opérateur de H définissant une structure préhilbertienne σ - permise, s la partie réelle du produit scalaire et B un opérateur hermitien de H . Nous savons que le sous groupe $\{e^{itB} \mid t \in \mathbb{R}\}$ du groupe des opérateurs unitaires $S^{i}(H,\sigma)$ de H , induit un sous groupe $\{\tau_{e^{itB}} \mid t \in \mathbb{R}\}$ de $\alpha(\overline{\Delta(H,\sigma)})$ (4.1.1 et 4.1.2) .

4.3.1 Soit B un opérateur hermitien de H et f un élément de $\mathfrak{F}_B$ tel que $f(e^{iBt}\psi) = f(\psi)$ pour tout $\psi \in H$ et tout $t \in \mathbb{R}$ et tel que $\lambda \in \mathbb{R} \to f(e^{itB}\psi + \varphi)$ soit continue pour tout $\psi, \varphi \in H$. Alors il exist une représentation unique unitaire continue U_f de $\mathbb{R}$, telle que

$$\pi_f(\tau_{e^{itB}}(a)) = U(t)\,\pi_f(a)\,U(t)^* \quad \text{et} \quad U(t)\,\hat{a} = \widehat{\tau_{e^{itB}}(a)}$$

$\hat{a}$ étant l'image canonique de $a \in \overline{\Delta(H,\sigma)}$, dans l'espace des représentation H_{π_f} .

Il est évident par définition que $\omega_f(\tau_{e^{itB}}(a)) = \omega_f(a)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $a \in \Delta(H,\sigma)$. Cette propriété s'étend à $\overline{\Delta(H,\sigma)}$ puisque ω_f et $\tau_{e^{itB}}$ sont continus. Par conséquent la forme positive ω_f est invariante par le groupe d'automorphismes $\{\tau_{e^{itB}} \mid t \in \mathbb{R}\}$. La proposition se démontre comme ([2],5.1.1) .

Le théorème de Stone ([8]) implique $U_f(t) = e^{itC_f}$ où C_f est un opérateur hermitien de H_{π_f} que nous appellerons "opérateur infinitésimal associée à B et à f". Il est clair que $\hat{\delta}_o$ (vecteur "vide") est vecteur propre de C_f à valeur propre 0 puisque $\lim_{t\to 0} \frac{U(t) - I}{t}\,\hat{\delta}_o = 0$. Notons A_f l'opérateur de champs associé à π_f (i.e. $\pi_f(\delta_\psi) = e^{iA_f(\psi)}$) .

Comme pour([2],5.1.2) nous avons

4.3.2 $\quad [C_f\ ,\ A_f(\psi)]_- \subseteq -i\ A_f(iB\psi)$.

Remarquons que l'opérateur "nombre de particules" est l'opérateur infinitésimal N_f associé à 1 et à f ([2] , 5.2) et que les opérateurs "impulsion-énergie" sont les quatre opérateurs infinitésimaux $\mathscr{H}_f^\mu$ ($\mu = 0,1,2$ et 3) associés respectivement aux opérateurs $i\,\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$ et à f quand $H = K_m^+$ (solutions de l'équation de Klein - Gordon à énergie positive) est muni du produit scalaire

$$h(\psi,\varphi) = \int \psi_F(\bar{k})^* \varphi_F(\bar{k})\ d\Omega_m(\bar{k})$$

([10] chapitres IV et V) ([2],5.4) .

4.4. Groupe des automorphismes de jauge de deuxième espèce de $\overline{\Delta(H,\sigma)}$:

Soit H' le dual algèbrique H , c'est-à-dire l'ensemble des fonctions $\mathbb{R}$ - linéaires sur H à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si π est un élément de $\mathcal{R}$, le théorème de Stone (voir [6]) implique $\pi(\delta_\psi) = e^{iA(\psi)}$ où $A(\psi)$ est hermitien. A qui est $\mathbb{R}$ - linéaire, est appelé "opérateur de champ". La transformation de jauge de deuxième espèce la plus générale de A , est de la forme : $A \longrightarrow A_\chi = A + \chi$ où $\chi \in H'$. Pour obtenir une telle transformation pour tous les éléments de $\mathcal{R}$, nous allons définir un élément de $\alpha(\overline{\Delta(H,\sigma)})$ qui transformera δ_ψ en $\zeta_\chi(\delta_\psi) = e^{i\chi(\psi)}\delta_\psi$, car

$$\pi(\zeta_\chi(\delta_\psi)) = \pi(e^{i\chi(\psi)}\delta_\psi) = e^{i[A(\psi) + \chi(\psi)]} = e^{iA_\chi(\psi)}$$

4.4.1 $\begin{cases}\text{Pour tout } \chi \in H' \text{ , l'application } \zeta_\chi : \delta_\psi \longrightarrow e^{i\chi(\psi)}\delta_\psi \text{ peut} \\ \text{s'étendre en un automorphisme unique de } \overline{\Delta(H,\sigma)} \text{ .}\end{cases}$

Posons par définition

$$\zeta_\chi\left(\sum_{j=1}^{m} a_j\,\delta_{\psi_j}\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j\, e^{i\chi(\psi_j)}\,\delta_{\psi_j} \qquad .$$

Cette application est un automorphisme isométrique de $\Delta(H,\sigma)$ car :

$$-\zeta_\chi\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\,\delta_{\psi_j} \cdot \sum_{k=1}^{m} b_k\,\delta_{\varphi_k}\right) = \zeta_\chi\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_j\, b_k\, e^{-i\sigma(\psi_j\varphi_k)}\,\delta_{\psi_j+\varphi_k}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_j b_k\, e^{-i\sigma(\psi_j,\varphi_k)}\, e^{i\chi(\psi_j+\varphi_k)}\,\delta_{\psi_j+\varphi_k}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j\, e^{i\chi(\psi_j)}\,\delta_{\psi_j} \cdot \sum_{k=1}^{m} b_k\, e^{i\chi(\varphi_k)}\,\delta_{\varphi_k}$$

$$= \zeta_\chi\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\,\delta_{\psi_j}\right) \cdot \zeta_\chi\left(\sum_{k=1}^{m} b_k\,\delta_{\varphi_k}\right) \qquad .$$

$$-\ \zeta_\chi\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\,\delta_{\psi_j}\right)^{*} = \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_j\, e^{-i\chi(\psi_j)}\,\delta_{-\psi_j} = \zeta_\chi\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\,\delta_{\psi_j}\right)^{*}\right) \quad .$$

$$-\ \zeta_\chi^{-1} = \zeta_{-\chi} \quad \text{(évident)} \quad .$$

$$-\|\zeta_\chi(\sum_{j=1}^{n} a_j\,\delta_{\psi_j})\|_1 = \|\sum_{j=1}^{n} a_j\, e^{i\chi(\psi_j)}\delta_{\psi_j}\|_1$$

$$= \sum_{j=1}^{n} |a_j| = \|\sum_{j=1}^{n} a_j\,\delta_{\psi_j}\|_1 \quad .$$

On montre comme dans 4.1.1 que ζ_χ peut être étendu en un automorphisme unique de $\Delta(H,\sigma)$ que nous continuerons à noter ζ_χ .

4.4.2 (L'application $\zeta : \chi \in H' \longrightarrow \zeta_\chi \in \alpha(\overline{\Delta(H,\sigma)})$ est un monomorphisme.

Supposons que $\zeta_\chi = \zeta_{\chi'}$. Alors, pour tout $\psi \in H$ $e^{i\chi(\psi)}\delta_\psi = e^{i\chi'(\psi)}\delta_\psi$ ce qui implique $e^{i\chi(\psi)} = e^{i\chi'(\psi)}$ pour tout $\psi \in H$. ([2] , 6.1.1) montre enfin que $\chi = \chi'$. De plus, il est évident que $\zeta_{\chi+\chi'} = \zeta_\chi \cdot \zeta_{\chi'}$ et que $\zeta_0 = \mathcal{J}$.

H' peut être considéré comme un sous-groupe abélien de $\alpha(\overline{\Delta(H,\sigma)})$.

Remarquons que si χ_φ est défini par $\chi_\varphi(\psi) = -2\sigma(\varphi,\psi)$ pour tout $\psi \in H$, alors si $a \in \Delta(H,\sigma)$,

$$\zeta_{\chi_\varphi}(a) = \delta_\varphi \cdot a \cdot \delta_{-\varphi}$$

car

$$\delta_\varphi\,\delta_\psi\,\delta_{-\varphi} = e^{-2i\sigma(\varphi,\psi)}\,\delta_\psi \quad .$$

ζ_{χ_φ} est donc un automorphisme interne. Ces automorphismes sont très importants car ils sont implémentables pour toutes les représentations de $\Delta(H,\sigma)$ (i.e. pour toute représentation, π de $\overline{\Delta(H,\sigma)}$, il existe un opérateur unitaire U de l'espace de représentation tel que $\pi(\zeta_{\chi_\varphi}(a)) = U\,\pi\,(a)\,U^{-1}$ pour tout $a \in \Delta(H,\sigma)$).

4.4.3 (Pour toute structure préhilbertienne σ - permise et pour tout $\chi \in H^*$ (H^* étant l'ensemble des éléments continus de H') , ζ_χ est implémentable pour toutes les représentations π telles que $\psi \longrightarrow \pi\,(\delta_\psi)$ soit fortement (ou faiblement) continu .

Montrons tout d'abord que π peut être étendu en une représentation π' de $\Delta(\overline{H},\sigma)$ ($\overline{H}$ étant l'espace de Hilbert complété de H) telle que $\psi \in \overline{H} \longrightarrow \pi'(\delta_\psi)$ soit fortement (ou faiblement) continu. Soit $\mathcal{H}$ l'espace de représentation de π . Pour tout $\xi \in H$, l'application $\psi \in H \longrightarrow \pi(\delta_\psi)\,\xi$ est uniformément continue par hypothèse.

D'après ([7] , 3.15.6) , elle peut-être étendue à $\overline{H}$. Pour tout $\psi \in \overline{H}$ et $\xi \in \mathcal{H}$, notons $\pi'(\delta_\psi)\xi$ le vecteur $\lim\limits_{\varphi\to\psi} \pi(\delta_\varphi)\xi$.

$\pi'(\delta_\psi)$ est donc un opérateur unitaire de $\mathcal{H}$. π' peut être considéré comme une application linéaire sur $\Delta(\overline{H},\sigma)$ en posant,

$$\pi'\,\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\,\delta_{\psi_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\pi'(\delta_{\psi_i})$$

pour tout

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\,\delta_{\psi_i} \in \Delta(\overline{H},\sigma) \qquad .$$

π' **est** une représentation car pour tout ψ , $\varphi \in \overline{H}$,

$$\pi'\,(\delta_\psi\,\delta_\varphi) = \pi'\,(\delta_\psi)\,\pi'\,(\delta_\varphi)$$

et

$$\pi'\,(\delta_\psi)^* = \pi'\,(\delta_{-\psi})$$

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ et $\xi \in \mathcal{H}$,

$$\| \pi'(\delta_\psi \, \delta_\varphi) \, \xi - \pi'(\delta_\psi) \, \pi'(\delta_\varphi)\xi\| \leqslant$$

$$\| e^{-i\sigma(\psi,\varphi)} \pi'(\delta_{\psi+\varphi})\xi \; - e^{-i\sigma(\psi',\varphi')} \; \pi(\delta_{\psi'+\varphi'})\xi\| \; +$$

$$\| \pi(\delta_{\varphi'})\xi - \pi'(\delta_\varphi)\xi \| + \| \pi(\delta_{\psi'}) \; \pi'(\delta_\varphi)\xi - \pi'(\delta_\psi) \; \pi'(\delta_\varphi)\xi \|$$

où ψ' et $\varphi' \in H$.

D'après l'hypothèse ψ' et φ' peuvent être choisis tels que

$$\| \pi'(\delta_\psi \, \delta_\varphi)\xi - \pi'(\delta_\psi) \; \pi'(\delta_\varphi)\xi \| \leqslant \varepsilon \quad .$$

Comme ξ et ε sont arbitraires nous avons

$$\pi'(\delta_\psi \, \delta_\varphi) \; = \; \pi'(\delta_\psi) \; \pi'(\delta_\varphi) \quad .$$

Cette égalité implique

$$\pi'(\delta_\psi)^{-1} \; = \; \pi'(\delta_{-\psi})$$

donc

$$\pi'(\delta_\psi)^* \; = \; \pi'(\delta_{-\psi})$$

puisque $\pi'(\delta_\psi)$ est unitaire.

3.1.2 nous indique que π' admet une extension unique π'' à $\overline{\Delta(\overline{H},\sigma)}$.

Supposons maintenant que $\chi \in H^*$. D'après le théorème de Riesz (voir ([7] , 6.3.2)) il existe un vecteur $\psi \in \overline{H}$ tel que $\chi(\varphi) = -2\sigma(\psi,\varphi)$

pour tout $\varphi \in \overline{H}$. Donc d'après ce que nous avons vu plus haut,

$$\zeta_\chi(a) = \delta_\psi \cdot a \cdot \delta_{-\psi}$$

pour tout $a \in \overline{\Delta(\overline{H},\sigma)}$. La démonstration s'achève en remarquant que si

$a \in \overline{\Delta(H,\sigma)}$, alors $\pi(\zeta_\chi(a)) = \pi'(\delta_u)\,\pi(a)\,\pi'(\delta_u)^*$.

La réciproque de 4.4.3 est

4.4.4 $\left\{\begin{array}{l}\text{Pour toute structure préhilbertienne } \sigma\text{ - permise et pour tout } \chi \in H' \\ \text{vérifiant : } \zeta_\chi \text{ est implémentable pour une représentation } \pi \text{ telle} \\ \text{que } \psi \longrightarrow \pi(\delta_\psi) \text{ soit fortement (ou faiblement) continue, alors} \\ \chi \in H^* .\end{array}\right.$

Par hypothèse $e^{i\chi(\psi)}\pi(\delta_\psi) = U\,\pi(\delta_\psi)U^*$ où U est un opérateur unitaire de l'espace de représentation $\mathcal{H}$. Si $\xi \in \mathcal{H}$ et $\|\xi\| = 1$ alors,

$$e^{i\chi(\psi)} = (U^*\,\pi(\delta_\psi)\xi \mid \pi(\delta_\psi)U^*\xi)$$

fonction continue en ψ par hypothèse . ([2], 6.1.2) implique $\chi \in H^*$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. KASTLER : The C^*-algebras of a free boson field . I Discussion of Basic Facts (Commun. Math. Phys. 1 , 14-18 (1965)).

[2] J. MANUCEAU : Etude de quelques automorphismes de la C^*-algèbre du champ de bosons libres (à paraître) .

[3] J. DIXMIER : Les C^*-algèbres et leurs représentations (Gauthier - Villars , 1964 , Paris).

[4] H. ARAKI : Hamiltonian Formalism and the Canonical Commutation Relations in Quantum Field Theory (J. Math. Phys. 1 , 492 (1960)).

[5] Z. TAKEDA : Inductive limit and infinite direct product of operator algebras (Tôhoku Math. J. t.7 , 67-86 (1955)).

[6] M.A. NAIMARK : Normed Rings (Noordhoff - Groningen , 1959 , The Netherlands).

[7] J. DIEUDONNE : Fondements de l'analyse moderne (Gauthier - Villars , 1963 , Paris)

[8] M.H. STONE : On one - parameter unitary groups in Hilbert space (Annals of Mathematics (2) , 33 , 643-648 (1932)).

[9] G.F. DELL'ANTONIO , S. DOPLICHER , D. RUELLE : A theorem on canonical commutation and anticommutation relations (Commun. Math Phys. 2 , 223-230 (1966))

[10] D. KASTLER : Introduction à l'electrodynamique quantique (Dunod , 1961, Paris) .

[11] J. Von NEUMANN : Die Eindentigkeit der Schrödingerschen Operators (Math. Ann. 104 , 570 (1931)).

-:-:-:-:-:-:-:-

P A R T I E III

ETATS QUASI-LIBRES DES FERMIONS

-:-:-:-:-:-:-:-

1. INTRODUCTION

La notion d' "état quasi-libre" de l'algèbre de Clifford a été définie par R. T. Powers [1]. L'étude des états quasi-libres invariants de translation a été commencée par E. Balslev et A. Verbeure [2]. Ici nous poursuivons cette étude en utilisant une méthode plus puissante qui permet d'obtenir des résultats plus complets.

Dans le deuxième chapitre nous donnans quelques résultats concernant les structures complexes des espaces de Hilbert réels ainsi que la définition et les principales propriétés de la C^*-algèbre des relations d'anticommutation.

L'étude détaillée des états quasi-libres fait l'objet du troisième chapitre.

2. PRELIMINAIRES MATHEMATIQUES

2.1. Structures complexes de l'espace monoparticulaire

Soit H un espace de Hilbert réel, muni du produit scalaire s. Cet espace est noté (H,s) et appelé "espace monoparticulaire".

Une structure hilbertienne s-permise de H sera définie par la donnée d'un opérateur orthogonal J de H (i.e. $s(J\psi,J\varphi) = s(\psi,\varphi)$ pour tout ψ et $\varphi \in H$), vérifiant :

$$J^2 = -1.$$

Si nous posons :

$$(\alpha + i\beta)\psi = \alpha\psi + \beta J\psi$$

$$h(\psi,\varphi) = s(\psi,\varphi) + is(J\psi,\varphi), \qquad \alpha \text{ et } \beta \in R, \quad \psi \text{ et } \varphi \in H,$$

alors, (H,h) est un espace de Hilbert complexe. La forme bilinéaire σ définie par :

$$\sigma(\psi,\varphi) = s(J\psi,\varphi)$$

est une forme symplectique (voir l'introduction de la première partie).

2.1.1. (Pour qu'un espace de Hilbert réel (H,s) admette une structure
(complexe s-permise, il faut et il suffit, que la dimension
(de H soit paire ou infinie.

Si H est de dimension impaire, il n'admet pas de structure complexe puisqu'il n'admet pas de forme symplectique. Supposons que H soit de dimension paire ou infinie et soit $\{e_i | i \in I\}$ une base orthonormale de H. I étant de puissance paire ou infinie, admet une partition formée de deux sous-ensembles I_1 et I_2 de même puissance. Soit γ une bijection appliquant I_1 sur I_2 et pour tout $i \in I_1$ notons ε_i l'élément $e_{\gamma(i)}$. L'application linéaire de H, définie par :

$$J(e_i) = \varepsilon_i$$

$$J(\varepsilon_i) = -e_i \qquad \text{pour tout } i \in I,$$

définit bien une structure complexe s-permise de H.

Nous dirons que J est associé à la base $\{e_i, \varepsilon_i \mid i \in I_1\}$ de H. Inversement, si J définit une structure complexe s-permise de H, il est aisé de construire une base $\{e_i, \varepsilon_i \mid i \in I\}$ de H telle que J lui soit associé.

2.1.2. Si J_1 et J_2 définissent deux structures complexes s-permises de H, il existe un opérateur orthogonal T de H tel que :

$$J_1 = TJ_2T^{-1}.$$

Soit $\{e_i, \varepsilon_i \mid i \in I\}$ (resp. $\{f_i, \varphi_i \mid i \in I\}$) une base orthonormale de H telle que J_1 (resp. J_2) lui soit associé. L'opérateur orthogonal T dans H défini par :

$$Te_i = f_i$$

$$T\varepsilon_i = \varphi_i \qquad \text{pour tout } i \in I,$$

prouve la proposition.

2.2. C^*-algèbre des relations d'anticommutation

Soit A(H) l'algèbre tensorielle réelle, construite sur H et $\mathfrak{J}(H,s)$ l'idéal bilatère engendré par les éléments de la forme

$$x \otimes x - s(x,x).1$$

où 1 est l'identité de A(H). L'algèbre complexifiée de

$$A(H)/\mathcal{J}(H,s)$$

est notée $\mathfrak{A}(H,s)$ et appelée "algèbre de Clifford". Soit $B(\psi)$ l'image de ψ par l'injection canonique de H dans $\mathfrak{A}(H,s)$. D'après la construction même de $\mathfrak{A}(H,s)$ il s'en déduit que

$$B : \psi \in H \longrightarrow B(\psi) \in \mathfrak{A}(H,s)$$

est une injection R-linéaire telle que :

$$[B(\psi),\ B(\varphi)]_+ = 2s(\psi,\varphi).1$$

pour tout ψ et $\varphi \in H$ où 1 est l'élément identité de $\mathfrak{A}(H,s)$. Il n'existe qu'une seule involution sur $\mathfrak{A}(H,s)$ telle que tous les $B(\psi)$, $\psi \in H$, soient hermitiens. De plus, il n'existe qu'une seule norme de C^*-algèbre ($\|a^*a\| = \|a\|^2$ pour tout $a \in \mathfrak{A}(H,s)$); notons $\overline{\mathfrak{A}(H,s)}$ la C^*-algèbre des relations d'anticommutation, complétée de $\mathfrak{A}(H,s)$ pour cette norme.

La même construction que la précédente aurait pu être faite si (H,s) avait été seulement un espace préhilbertien réel. Mais comme

$$\|B(\psi)\|^2 = \|B(\psi)^*B(\psi)\| = \|B(\psi)^2\| = \|\psi\|^2,$$

on obtient

$$\overline{\mathfrak{A}(H,s)} = \overline{\mathfrak{A}(\overline{H},s)}$$

où $\overline{H}$ est le complété de H. Par conséquent dans tout ce qui suivra nous supposerons H complet.

2.2.1. (Si dim $H = +\infty$, $\overline{\mathfrak{A}(H,s)}$ est une C^*-algèbre simple.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des sous espaces vectoriels de H de dimension finie. Si $E \in \mathcal{E}$, $\mathfrak{A}(E,s)$ est une algèbre de type I_{2^n} où n est la moitié de la dimension de E, elle est donc simple. Comme $\mathcal{E}$ est un ensemble filtrant (i.e. pour tout E_1 et $E_2 \in \mathcal{E}$, il existe

$E_3 \in \mathcal{E}$ tel que $E_1 \cup E_2 \subset E_3$) et absorbant (i.e. $H = \bigcup_{E\in\mathcal{E}} E$) et que

$$\mathfrak{A}(H,s) = \bigcup_{E\in\mathcal{E}} \mathfrak{A}(E,s),$$

on déduit que $\overline{\mathfrak{A}(H,s)}$ est la limite inductive des algèbres simples $\{\mathfrak{A}(E,s) \mid E \in \mathcal{E}\}$, elle est donc simple.

Un opérateur T dans H est dit orthogonal, s'il est surjectif et s'il vérifie :

$$s(T\psi,T\varphi) = s(\psi,\varphi)$$

pour tout ψ et $\varphi \in H$. Notons $\mathcal{O}(H,s)$ le groupe des opérateurs orthogonaux de (H,s) et $\alpha(\overline{\mathfrak{A}(H,s)})$ le groupe des automorphismes de $\overline{\mathfrak{A}(H,s)}$.

2.2.2. (Pour tout $T \in \mathcal{O}(H,s)$, l'application qui à $B(\psi)$ fait correspondre $B(T\psi)$ peut s'étendre en un automorphisme unique τ_T de $\overline{\mathfrak{A}(H,s)}$. De plus, l'opérateur :

$$\tau : T \in \mathcal{O}(H,s) \longrightarrow \tau_T \in \alpha(\overline{\mathfrak{A}(H,s)})$$

est un monomorphisme.

Cette proposition est immédiate.

Tous les automorphismes de $\overline{\mathfrak{A}(H,s)}$ ne sont pas de ce type : si $\|\psi\| = 1$ et si $u_\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + iB(\psi))$, u_ψ est un élément unitaire de $\mathfrak{A}(H,s)$ et $u_\psi B(\varphi) u_\psi^*$ n'est pas de la forme $B(\varphi')$.

2.2.3. (Si E est un sous espace vectoriel de H de dimension n et si P_E est le projecteur orthogonal sur E,

$$T_E = (-1)^n (1 - 2P_E)$$

appartient à $\mathcal{O}(H,s)$ et τ_{T_E} est un automorphisme intérieur.

Plus précisément, si $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$ est une base orthonormée de E et si

$$u = B(\psi_1)\ldots B(\psi_n)$$

alors,

$$\tau_{T_E}(a) = uau^* \qquad \text{pour tout } a \in \overline{\mathfrak{A}(H,s)}.$$

En effet, si $n = 1$,

$$B(\psi)B(\varphi)B(\psi) = 2s(\psi,\varphi)B(\psi) - B(\varphi) = B((2P_E - 1)\varphi)$$

et l'on termine la démonstration par récurrence.

3. ETATS QUASI-LIBRES

3.1. Définition

Soit ω une forme linéaire de $\mathfrak{A}(H,s)$. La fonction tronquée ω_n^T d'ordre n de ω est définie par la formule de récurrence :

$$\omega(B(\psi_1)\dots B(\psi_n)) = \sum (-1)^{\eta_i} \omega_{i_1}^T(B(\psi_{1_1})\dots B(\psi_{1_{i_1}}))\dots\omega_{i_k}^T(B(\psi_{k_1})\dots B(\psi_{k_{i_k}}))$$

cette somme étant étendue à toutes les partitions de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$, où les suites $(j_q)_{1\leq q\leq i_j}$ sont strictement croissantes et où η_i est parité de la permutation :

$$(1,2,\dots,n) \longrightarrow (1_1,1_2,\dots,1_{i_1},\dots,k_{i_k}) ;$$

il est en outre supposé que :

$$1_1 < 2_1 < \dots < k_1.$$

Une forme linéaire ω est dite quasi-libre si toutes ses fonctions tronquées d'ordre différent de deux sont nulles. Ceci implique notamment, si n est impair,

$$\omega(B(\psi_1)\dots B(\psi_n)) = 0$$

quels que soient les $\psi_i \in H$; ω est donc entièrement définie dans ce cas par les valeurs qu'elle prend sur l'ensemble

$$\{1,\ B(\psi)B(\varphi) \mid \psi \text{ et } \varphi \in H\}.$$

En remplaçant ω par $\omega/\omega(1)$ (si $\omega(1)$ est différent de 0) nous pouvons toujours nous ramener au cas où $\omega(1) = 1$. Posons

$$\omega(B(\psi)B(\varphi)) = h(\psi,\varphi) + i\,\sigma(\psi,\varphi)$$

où h et σ sont deux formes bilinéaires de H à valeurs réelles.

La linéarité de ω et la relation

$$[B(\psi),\ B(\varphi)]_+ = 2s(\psi,\varphi)\cdot 1$$

impliquent :

$$\sigma(\psi,\varphi) = -\sigma(\varphi,\psi) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(h(\psi,\varphi)+h(\varphi,\psi)) = s(\psi,\varphi).$$

Ainsi ω est entièrement déterminée par la donnée de deux formes σ et h bilinéaires, à valeurs réelles, respectivement antisymétrique et à partie symétrique égale à s.

3.1.1. (Pour qu'une forme quasi-libre ω de $\mathfrak{A}(H,s)$ soit un état,
(
(il faut et il suffit que $h=s$ et $\|\sigma\| \leqslant 1$.

Si ω est un état,

$$\omega((B(\psi) + iB(\varphi))(B(\psi) - iB(\varphi))) \geqslant 0$$

pour tout ψ et $\varphi \in H$. Par un calcul élémentaire on voit que cette condition implique

$$h = s \quad \text{et} \quad |\sigma(\psi,\varphi)| \leqslant \|\psi\|\cdot\|\varphi\|.$$

La réciproque est établie par les propositions 3.3.2. et 3.3.5. où nous construisons explicitement la représentation associée à ω par la construction de Guelfand-Naimark.

H étant complet et σ continue, il existe un opérateur borné A de H tel que

$$\sigma(\psi,\varphi) = s(A\psi,\varphi).$$

Il est évident que $A^+ = -A$ (puisque σ est antisymétrique), A^+ étant l'adjoint de A pour s et $\|A\| = \|\sigma\|$. Ainsi nous avons établi une bijection entre l'ensemble des états quasi-libres et celui des opérateurs bornés anti-hermitiens de (H,s) de norme inférieure ou égale à 1. Les états quasi-libres seront donc notés ω_A où

$$\omega_A(B(\psi)B(\varphi)) = s(\psi,\varphi) + is(A\psi,\varphi)$$

pour tout ψ et $\varphi \in H$. π_A, $\mathcal{H}_A$ et Ω_A seront respectivement la représentation, l'espace de représentation et le vecteur cyclique associés à ω_A par la construction de Guelfand-Naimark.

3.2. Etats de Fock. Etat central.

Le théorème d'existence de la décomposition polaire d'un opérateur n'utilisant que l'existence de la racine carrée positive d'un opérateur positif, une telle décomposition reste possible dans un espace réel (voir [3] , appendice 3). Soit donc,

$$A = J|A|$$

la décomposition polaire de A. Les opérateurs J et $|A|$ commutent puisque A est normal et J vérifie sur le support de A :

$$J^+ = -J, \quad J^2 = -1.$$

J définit donc une structure complexe du support de A.

Les états de Fock, ce sont les états quasi-libres ω_A où $A^2 = -1$. Nous préférerons alors la lettre J à la lettre A puisque cet opérateur définit alors une structure complexe de H.

3.2.1. (Si ω_{J_1} et ω_{J_2} sont deux états de Fock de $\overline{\mathfrak{A}(H,s)}$, il existe un élément T de $\mathcal{O}(H,s)$ tel que

$$\omega_{J_1} = \omega_{J_2} \circ \tau_T.$$

D'après 2.1.2, il existe un élément T de $\mathcal{O}(H,s)$ tel que

$$J_1 = T^+ J_2 T^- .$$

Donc

$$(\omega_{J_2} \circ \tau_T)(B(\psi)B(\varphi)) = s(\psi,\varphi) + is(J_2T\psi,T\varphi) = \omega_{J_1}(B(\psi)B(\varphi)),$$

ce qui établit la proposition.

L'automorphisme τ_T est la transformation de Bogoliubov la plus générale.

~~Il est bien connu que les représentations de Fock~~ J

Il est bien connu que les représentations de Fock π_J sont irréductibles. Les états de Fock correspondants ω_J sont donc purs.

3.2.2. (ω_0 est l'état central de $\overline{\mathfrak{A}(H,s)}$.

On sait que $\overline{\mathfrak{A}(H,s)}$ n'admet qu'un seul état central (ω est central si $\omega(ab) = \omega(ba)$ pour tout a et $b \in \overline{\mathfrak{A}(H,s)}$).

Or il est évident que

$$\omega_0(ab) = \omega_0(ba)$$

pour tout a et b de $\mathfrak{A}(H,s)$, puisque s est symétrique et ω_0 quasi-libre. Par continuité de ω_0 cette dernière égalité est vérifiée sur $\overline{\mathfrak{A}(H,s)}$. ω_0 est donc l'état central.

3.3. Structure produit des états quasi-libres

Soit ω_A un état quasi-libre et $H = \bigoplus_{n \in N} H_n$ une décomposition de H en somme hilbertienne. Nous dirons que ω_A est un état produit pour la décomposition $\bigoplus_{n \in N} H_n$ si pour tout $n \in N$, tout $a \in \overline{\mathfrak{A}(H_n,s)}$ et tout $b \in \overline{\mathfrak{A}(H_n^{\perp},s)}$, on a :

$$\omega(ab) = \omega(a)\omega(b).$$

Nous écrirons alors :

$$\omega = \bigotimes_{n \in N} \omega \big| \overline{\mathfrak{A}(H_n,s)}.$$

3.3.1. (Soit $(H_n)_{n \in N}$ une suite de sous-espaces orthogonaux de H invariants par A et de somme hilbertienne H. ω_A est alors un état produit :

$$\omega_A = \bigotimes_{n \in N} \omega_{A_n}$$

où A_n est la restriction de A à H_n.

On est ramené immédiatement par linéarité et par continuité à prouver la relation :

$$\omega_A(XY) = \omega_A(X)\,\omega_A(Y) \tag{1}$$

dans le cas où :

$$X = B(\psi_1)B(\psi_2)\ldots B(\psi_q)$$
$$Y = B(\varphi_1)B(\varphi_2)\ldots B(\varphi_m)$$

avec $\psi_k \in H_n$, $k=1,\ldots,q$ et $\varphi_p \in H_n^{\perp}$, $p=1,\ldots,m$. Si q et m sont de parité différente l'égalité (1) est évidente car ω_A s'annule sur les produits impairs de $B(\psi)$, $\psi \in H$. Si q et m sont de même parité, en dévehoppant

$$\omega_A(XY) - \omega_A(X)\,\omega_A(Y)$$

à l'aide de la définition des états quasi-libres, on obtient une somme de produits de termes dont l'un au moins, du type

$$\omega_A(B(\psi)B(\varphi)) \text{ avec } \psi \in H_n \text{ et } \varphi \in H_n^{\perp},$$

est nul en vertus des hypothèses.

3.3.2. (Tout état quasi-libre ω_A est un état produit par rapport
(à la décomposition de H en somme hilbertienne

$$H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3,$$

(avec

$$H_1 = \ker(1 - |A|)$$
$$H_2 = \ker A$$
$$H_3 = H \ominus (H_1 \oplus H_2), \quad \text{où } A = J|A|.$$

Il est évident que H_1, H_2 et H_3 sont invariants par A et mutuellement orthogonaux et la conclusion résulte directement du lemme précédent. Nous avons donc :

$$\omega_A = \omega_{A_1} \otimes \omega_{A_2} \otimes \omega_{A_3}$$

Par hypothèse, $A_1^2 = -1$ et $A_2 = 0$; l'état ω_{A_1} est un état de Fock et l'état ω_{A_2} est l'état central.

3.3.3. (Un état quasi-libre est pur si et seulement s'il est un
(état de Fock.

Une condition nécessaire et suffisante pour que ω_A soit pur est que les ω_{A_n} soient purs [3]. Il suffit donc de prouver le lemme suivant :

3.3.4. (Si $H_1 = H_2 = \{0\}$, ω_A n'est pas pur.

Nous définissons :

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + |A|)^{1/2}$$

$$T_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - |A|)^{1/2}$$

et soit θ_J l'opérateur de $\mathcal{H}_J$ défini par

$$[\theta_J, \ \pi_J(B(\psi))]_+ = 0, \text{ pour tout } \psi \in H$$

et

$$\theta_J \Omega_J = \Omega_J .$$

Il est aisé de vérifier que π_A est équivalente à la représentation π dans $\mathcal{H}_J \otimes \mathcal{H}_{-J}$ définie par :

$$\pi(B(\psi)) = \pi_J(B(T_1\psi)) \otimes 1 + \theta_J \otimes \pi_{-J}(B(T_2\psi))$$

En effet, cette représentation admet pour vecteur cyclique

$$\Omega_J \otimes \Omega_{-J},$$

car T_1 et T_2 sont injectifs et l'état associé correspondant coïncide avec ω_A sur les produits $B(\psi)B(\varphi)$. Comme cet état est quasi-libre (ce qui se montre par un calcul direct sans intérêt) il est égal à ω_A. La représentation π' définie par :

$$\pi'(B(\psi)) = \theta_J \pi_J(B(T_2\psi)) \otimes \theta_{-J} - 1 \otimes \theta_{-J} \pi_{-J}(B(T_1\psi))$$

admet également pour vecteur cyclique :

$$\Omega_J \otimes \Omega_{-J}$$

et commute à π . Donc π n'est pas irréductible et ω_A n'est pas pur.

APPENDICE

Dans cet appendice, nous montrons que si H est séparable il existe un isomorphisme entre $\overline{\mathfrak{A}(H,s)}$ et le produit tensoriel infini de C^*-algèbres de dimension quatre.

A.1. (Pour tout espace de Hilbert réel (H,s) de dimension paire, il existe un élément β de $\mathfrak{A}(H,s)$ anticommutant avec les $B(\psi)$, $\psi \in H$ et tel que

$$\beta^2 = 1.$$

Supposons que dim $H = 2n$ et soit $\psi_1, \ldots, \psi_{2n}$ une base orthonormale de H ; alors

$$\beta = i^n B(\psi_1) \ldots B(\psi_{2n})$$

vérifie les propriétés demandées.

A.2. (Pour tout espace de Hilbert réel (H,s), où

$$H = H_1 \oplus H_2$$

H_1 étant de dimension paire, la C^*-algèbre $\overline{\mathfrak{A}(H,s)}$ est isomorphe à $\mathfrak{A}(H_1,s) \otimes \overline{\mathfrak{A}(H_2,s)}$ (produit tensoriel des C^*-algèbres au sens de [4]).

L'isomorphisme ξ entre $\overline{\mathfrak{A}(H,s)}$ et $\mathfrak{A}(H_1,s) \otimes \overline{\mathfrak{A}(H_2,s)}$ est défini par :

$$\xi(B(\psi)) = B(\psi) \otimes 1 \quad \text{si } \psi \in H_1$$
$$\xi(B(\psi)) = \beta \otimes B(\psi) \quad \text{si } \psi \in H_2$$

où $\beta \in \mathfrak{A}(H_1,s)$ est défini par A.1.

A.3. $\left(\begin{array}{l} \text{Si l'espace de Hilbert réel } (H,s) \text{ est séparable, la } C^*\text{-algèbre} \\ \overline{\mathcal{O}\!\mathcal{L}(H,s)} \text{ est isomorphe à } \underset{n\in N}{\otimes} \mathcal{B}_n \text{ où } \mathcal{B}_n \text{ est la } C^*\text{-algèbre des} \\ \text{matrices 2x2 } (\underset{n\in N}{\otimes} \mathcal{B}_n \text{ est le produit tensoriel infini de} \\ C^*\text{-algèbres [5]).} \end{array} \right.$

Soit $\{\psi_i, \varphi_i \mid i\in N\}$ une base orthonormale de (H,s) et (H_i,s) le sous-espace de (H,s) engendré par $\{\psi_i, \varphi_i\}$ pour tout $i\in N$. La C^*-algèbre $\mathcal{O}\!\mathcal{L}(H_i,s)$ est isomorphe à $\mathcal{B}_i$ pour tout $i\in N$. L'isomorphisme η entre $\overline{\mathcal{O}\!\mathcal{L}(H,s)}$ et $\underset{n\in N}{\otimes} \mathcal{B}_n$ est défini par :

$$\eta(B(\psi)) = \beta_1 \otimes \beta_2 \otimes \dots \otimes \beta_{j-1} \otimes B(\psi) \otimes 1 \otimes 1 \otimes \dots$$

si $\psi \in H_j$. Pour tout $k\in N$, l'élément β_k appartient à $\mathcal{O}\!\mathcal{L}(H_k,s)$ et est défini par A.1.

REFERENCES III

-:-:-:-:-:-:-:-:-

[1] R. T. Powers ; Princeton Thesis (1967).

[2] E. Balslev and A. Verbeure ; Comm. Math. Physics

[3] J. Dixmier ; "Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien" Gauthier-Villars Paris (1958).

[4] T. Turumaru ; Tôhoku Math. Journ. 4, 242 (1952).

A. Wulfsohn ; Bull. Sc. Math. 2° série, 87, 13 (1963).

[5] Z. Takeda ; Tôhoku Math. Journ. 7, 67 (1955).

PARTIE IV

ETATS QUASI-LIBRES DES BOSONS

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

1. INTRODUCTION

La notion d' "état quasi-libre" des bosons a été introduite par D. W. Robinson [1] dans son étude de l'état fondamental du gaz de Bose. Cependant les états étudiés par D. W. Robinson, sont invariants de translation. Ici nous faisons une étude générale des états quasi-libres de la C^*-algèbre des relations de commutation $\overline{\Delta(H, \sigma)}$. La méthode utilisée permet une meilleure compréhension des problèmes.

Afin de faciliter la lecture de cette partie, dans le deuxième chapitre, nous rappelons très brièvement la définition et les principales propriétés de la C^*-algèbre des relations de commutation. Nous y avons rassemblé aussi, tous les résultats mathématiques nécessaires à l'étude des états quasi-libres qui fait l'objet du troisième chapitre.

2. PRELIMINAIRES MATHEMATIQUES

2.1. C^*-algèbre des relations de commutation

Soit (H, σ) un espace symplectique : H est un espace vectoriel réel (espace monoparticalaire) et σ une forme bilinéaire antisymétrique et régulière (c'est-à-dire, telle que $\sigma(\psi,\varphi) = 0$ pour tout $\psi \in H$ est équivalent à $\varphi = 0$) sur H. $\Delta(H,\sigma)$ est l'algèbre involutive engendrée par les éléments unitaires notés δ_ψ, $\psi \in (H,\sigma)$ et vérifiant :

$$(\delta_\psi)^* = \delta_{-\psi}$$

$$\delta_\psi \, \delta_\varphi = \exp\{-i\sigma(\psi,\varphi)\}\, \delta_{\psi+\varphi}$$

δ_0 est l'unité de cette algèbre.

L'ensemble $\mathcal{R}(H,\sigma)$ des représentations des relations de commutation est l'ensemble des représentations π de $\Delta(H,\sigma)$ telles que l'application $\lambda \in R \longrightarrow \pi(\delta_{\lambda\psi})$ soit faiblement continue pour tout $\psi \in H$. Toutes ces représentations induisent la même norme sur $\Delta(H,\sigma)$ (c'est-à-dire, que pour π_1 et $\pi_2 \in \mathcal{R}(H,\sigma)$

$$\|\pi_1(X)\| = \|\pi_2(X)\|$$

pour tout $X \in \Delta(H,\sigma)$. La complétion de $\Delta(H,\sigma)$ pour cette norme est la C^*-algèbre $\overline{\Delta(H,\sigma)}$. Pour tout $\pi \in \mathcal{R}(H,\sigma)$:

$\pi(\delta_\psi) = \exp\{iB(\psi)\}$, où $B(\psi)$ est l'opérateur de champ.

Soient H_1 et H_2 deux sous-espaces vectoriels réguliers de (H,σ) (c'est-à-dire que $\sigma | H_1 x H_1$ et $\sigma | H_2 x H_2$ restent régulières). Supposons que $\sigma(\psi_1, \psi_2) = 0$, quels que soient $\psi_1 \in H_1$ et $\psi_2 \in H_2$. Alors, si $H = H_1 \oplus H_2$:

$$\overline{\Delta(H,\sigma)} = \overline{\Delta(H_1,\sigma)} \otimes \overline{\Delta(H_2,\sigma)} \qquad (1)$$

Un opérateur bijectif T de H est dit symplectique s'il vérifie :

$$\sigma(T\psi,\ T\varphi) = \sigma(\psi,\varphi)$$

pour tout $\psi,\varphi \in H$. Alors l'application :

$$\tau_T : \delta_\psi \longrightarrow \delta_{T\psi} \quad ,\ \psi \in H \tag{2}$$

s'étend en un automorphisme unique de $\overline{\Delta(H,\sigma)}$.

De même, pour tout élément χ du dual algébrique de H, l'application :

$$\delta_\psi \longrightarrow e^{i\chi(\psi)}\,\delta_\psi \tag{3}$$

s'étend en un automorphisme unique ξ_χ de $\overline{\Delta(H,\sigma)}$, appelé "automorphisme de jauge de seconde espèce induit par χ ".

2.2. Produits scalaires réels sur (H,σ)

On munit H de la structure uniforme définie par la famille de semi-normes :

$$p_\varphi : \psi \longrightarrow |\sigma(\varphi,\psi)|$$

On supposera dans tout ce qui suit que H est complet pour les suites, c'est-à-dire, que toute suite $(\varphi_n)_{n\in N}$ d'éléments de H telle que, pour tout $\psi\in H$, $(\sigma(\psi,\varphi_n))_{n\in N}$ soit une suite de Cauchy, est convergente.

En outre, soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des produits scalaires réels s de H tels que :

- $|\sigma(\psi,\varphi)|^2 \leqslant \|\psi\|_s^2 \cdot \|\varphi\|_s^2$, où $\|\psi\|_s^2 = s(\psi,\psi)$ (4)

- l'extension continue σ' de σ à $\overline{H}^s$ (complété de H pour la norme $\|\cdot\|_s$) est régulière. (5)

(H, s) est alors un espace préhilbertien réel avec la norme $\|\cdot\|_s$. Nous noterons également $\|\cdot\|_s$ la norme des opérateurs bornés sur (H, s).

2.2.1. (Pour tout $s \in \mathcal{S}$, (H, s) est un espace de Hilbert réel.

Soit ψ_1 un élément de $\overline{H}^s$. Il existe une suite $(\varphi_n)_{n \in N}$ d'éléments de H qui converge pour la norme $\|\cdot\|_s$ vers ψ_1. Par conséquent ((4) et (5)), pour tout $\xi \in H$,

$$\lim_{n \to \infty} \sigma'(\varphi_n, \xi) = \sigma'(\psi_1, \xi).$$

Puisque H est complet pour les suites, (4) implique l'existence d'un élément ψ_2 de H tel que pour tout $\xi \in H$,

$$\lim_{n \to \infty} \sigma(\varphi_n, \xi) = \sigma(\psi_2, \xi).$$

Par suite $\sigma'(\psi_1 - \psi_2, \xi) = 0$ pour tout ξ dans H. La continuité (4) et la régularité (5) de σ' montrent alors que $\psi_1 = \psi_2 \in H$.

Pour tout $s \in \mathcal{S}$, il existe donc un opérateur borné D_s de H tel que $\sigma(\psi, \varphi) = s(D_s \psi, \varphi)$ pour tout ψ et $\varphi \in H$, et $\|D_s\|_s \leqslant 1$ d'après (4). Soit $J \cdot |D_s|$ la décomposition polaire de D_s ; D_s étant un opérateur normal (car $D_s^+ = -D_s$ où D_s^+ est l'adjoint de D_s au sens de s), on a $[J, |D_s|]_- = 0$ (, page 935). J définit une structure hilbertienne σ-permise sur H ([2], pages 28 et 29), c'est-à-dire que si l'on définit la multiplication des éléments de H par les nombres complexes de la façon suivante :

$$(\alpha + i\beta)\psi = \alpha\psi + \beta J \psi \qquad \alpha, \beta \in R, \quad \psi \in H$$

alors H, muni du produit scalaire :

$$h(\psi, \varphi) = s_J(\psi, \varphi) + i\,\sigma(\psi, \varphi)$$

où

$$s_J(\psi, \varphi) = -\sigma(J\psi, \varphi)$$

est un espace de Hilbert complexe. Pour cela il suffit de vérifier que s_J est positive. En effet D_s étant normal et injectif son domaine de valeurs H_s, est dense dans H et

$$s_J(|D_s|\psi, |D_s|\psi) = -\sigma(J|D_s|\psi, |D_s|\psi) = -\sigma(D_s\psi, |D_s|\psi) =$$
$$s(D_s\psi, |D_s|\cdot D_s\psi) \geqslant 0.$$

Il est clair en outre que $s_J \in \mathcal{S}$.

L'opérateur $A_s = -D_s^{-1} = J|D_s|^{-1}$ défini sur $H_s = D_s H$, est en général non borné. En fait, A_s est borné si et seulement si

$$H_s = H.$$

Puisque $\|D_s\|_s \leqslant 1$, $|A_s| \geqslant 1$, de sorte que l'opérateur $|A_s| - 1$ est positif.

Si (H, h) est un espace de Hilbert complexe et si σ est la partie imaginaire de produit scalaire h, il est bien connu que (H, σ) est complet pour les suites. Ce qui précède nous montre donc que si (H, σ) est un espace symplectique complet pour les suites, il admet des structures hilbertiennes σ-permises, si et seulement si, $\mathcal{S}$ n'est pas vide.

2.2.2. (Pour tout espace symplectique (H, σ) complet pour les suites
(et pour toute structure hilbertienne σ-permise J de (H, σ),
(il existe un sous-espace fermé E de H et un opérateur
(symplectique Λ de H tel que
($$H = E \oplus JE, \quad \Lambda^2 = 1 \text{ et } [\Lambda, J]_+ = 0.$$

Soit $\{\varepsilon_i, \varphi_i \mid i \in I\}$ une base orthonormale de H, telle que J lui soit associé (i.e. $J\varepsilon_i = \varphi_i$, pour tout $i \in I$). L'application linéaire Λ définie par :

$$\Lambda\varepsilon_i = \varphi_i \quad \text{et} \quad \Lambda\varphi_i = \varepsilon_i \text{ , pour tout } i \in I,$$

est hermitien orthogonal et satisfait :

$$[\Lambda, J]_+ = 0.$$

Les projecteurs :

$$P = \frac{1+\Lambda}{2} \qquad \text{et} \qquad Q = \frac{1-\Lambda}{2}$$

sont orthogonaux complémentaires et satisfont :

$$\Lambda P = P\Lambda = P, \quad \Lambda Q = Q\Lambda = -Q \quad \text{et} \quad JP = QJ.$$

Alors, si $E = PH$, $JE = QH$ et $H = E \oplus JE$.

2.2.3. (Pour tout $s \in \mathcal{S}$, il existe une conjugaison Λ de $(H, s_J + i\sigma)$
(telle que

$$[\Lambda, |A_s|]_- = 0.$$

L'opérateur $|D_s|$ étant un opérateur positif, admet une décomposition spectrale :

$$|D_s| = \int_0^{\|D_s\|} \lambda \, dE(\lambda).$$

Alors, H se décompose en une intégrale directe d'espaces hilbertiens :

$$H = \int_\oplus H_\lambda \, d\mu(\lambda)$$

et si Λ_λ est une conjugaison de H_λ, l'opérateur :

$$\Lambda = \int \Lambda_\lambda \, dE(\lambda)$$

est une conjugaison de H, commutant avec $|D_s|$; elle commute donc avec $|A_s|$ et $(|A_s| \pm 1)$.

2.2.4. (Pour tout espace symplectique (H, σ) complet pour les suites
(et pour tout couple J_1 et J_2 de structures hilbertiennes
(σ-permises, il existe un opérateur symplectique T tel
(que : $\quad J_1 = T^+ J_2 T.$

Cette proposition se démontre de la même façon que la proposition (2.1.2, partie III).

3. ETATS QUASI-LIBRES

3.1. Définition

Soit f une application de H dans C, telle que $f(0)=1$;

f est appelée quasi-libre (voir l'appendice), si :

$$f(\Psi)=\exp\{f'_0(\Psi)+\frac{1}{2}f''_T(\Psi,\Psi)\}$$

où

$$f''_T(\Psi,\Psi)=f''_0(\Psi,\Psi)-f'_0(\Psi)^2,$$

$$f'_\varphi(\Psi)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(\varphi+\lambda\Psi)-f(\varphi)}{\lambda}$$

et

$$f''_0(\Psi_1,\Psi_2)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f'_{\lambda\Psi_2}(\Psi_1)-f'_0(\Psi_1)}{\lambda}$$

Soit f une application quasi-libre ; nous définissons une forme linéaire ω_f sur $\overline{\Delta(H,\sigma)}$ par :

$$\omega_f(\delta_\Psi)=f(\Psi).$$

D'après (partie II, 3.2.1), ω_f est un état, si et seulement si, $f\in\mathfrak{F}$. Remarquons que dans ce cas $f\in\mathfrak{F}_0$. Sous ces conditions ω_f est appelé "état quasi-libre". Notons Q, l'ensemble des états quasi-libres. Cette définition coïncide avec celle donnée par D.W. Robinson [1] .

Pour tout $\omega_f\in Q$, le théorème de Stones implique :

$$\pi_f(\delta_\Psi)=\exp\{iB_f(\Psi)\}$$

où $B_f(\Psi)$ est un opérateur hermitien (non borné en général) de l'espace de représentation. B_f est linéaire et

$$\omega_f(\delta_\Psi)=(\Omega_f|\exp\{iB_f(\Psi)\}\Omega_f) \qquad (1)$$

où Ω_f est le vecteur cyclique de π_f. De (1) on tire :

$$f'_0(\Psi)=i(\Omega_f|B_f(\Psi)\,\Omega_f).$$

f'_0 étant dans le dual de H, dans tout ce qui va suivre nous la supposerons nulle car si

$$g(\Psi) = \exp\{\tfrac{1}{2}f''_T(\Psi,\Psi)\},$$

alors,

$$\omega_f = \omega_g \circ \xi_{-if'_0} \quad \text{et} \quad \pi_f = \pi_g \circ \xi_{-if'_0}$$

où $\xi_{-if'_0}$ est un automorphisme de jauge (2.1).

Notons Q_0 l'ensemble $\{\omega_f \in Q \mid f'_0 = 0\}$. Si $\omega_f \in Q_0$, alors

$$f''_T(\Psi_1,\Psi_2) = i\sigma(\Psi_1,\Psi_2) - (\Omega_f | B_f(\Psi_1)B_f(\Psi_2)\Omega_f)$$

et $$f''_T(\Psi,\Psi) = -(\Omega_f | B_f(\Psi)^2\Omega_f) = -s(\Psi,\Psi).$$

Par conséquent, tout élément ω_f de Q_0 est de la forme :

$$\omega_f(\delta_\Psi) = \omega_s(\delta_\Psi) = \exp\{-\tfrac{1}{2}s(\Psi,\Psi)\}$$

où s est une forme bilinéaire symétrique de H.

3.1.1. (La forme linéaire $\omega_s \in Q_0$, si et seulement si, s vérifie (4).

Si $\omega_s \in Q_0$, alors

$$(\Omega_s | B_s(\Psi_1)B_s(\Psi_2)\Omega_s) = s(\Psi_1,\Psi_2) + i\sigma(\Psi_1,\Psi_2).$$

ω_s étant un état on a :

$$(\Omega_s | (B_s(\Psi) + iB_s(\varphi))(B_s(\Psi) - iB_s(\varphi))\Omega_s) \geqslant 0$$

pour tout Ψ et φ dans H. Un calcul élémentaire montre alors que s vérifie (4). Nous prouverons la réciproque, en construisant explicitement la représentation associée à ω_s par la construction de Guelfand-Naimark (3.3.2. et 3.3.3.).

La proposition 3.1.1, établit donc une bijection entre l'ensemble Q_0 et l'ensemble des produits scalaires s de H vérifiant (4).

3.2. Etats de Fock

Les états de Fock de $\overline{\Delta(H,\sigma)}$ sont les éléments ω_s de Q_0 tels que $s \in \mathcal{S}$ et $A_s^2 = -1$. L'opérateur A_s définit alors une structure hilbertienne σ-permise sur (H,σ). Les opérateurs de création et d'annihilation correspondants sont :

$$B_s^{\pm}(\psi) = \frac{1}{2}\{B_s(\psi) \mp iB_s(A_s\psi)\} \qquad \text{pour tout } \psi \in H.$$

Le vecteur cyclique de π_s est noté Ω_s et vérifie :

$$B_s^{-}(\psi)\Omega_s = 0 \text{ pour tout } \psi \in H.$$

Les représentations de Fock sont irréductibles, les états de Fock sont donc purs.

3.2.1. (Si ω_1 et ω_2 sont deux états de Fock, il existe un opérateur symplectique T de (H,σ) tel que :

$$\omega_1 = \omega_2 \circ \tau_T.$$

Cette proposition est une conséquence immédiate de 2.2.4.

3.3. Structure produit des états quasi-libres factoriels

3.3.1. (Si s est un produit scalaire de H vérifiant (4) et non (5), ω_s est un état quasi-libre non factoriel.

Soit ψ un élément de $\overline{H}^s$ tel que :

$$\sigma'(\psi,\varphi) = 0 \text{ pour tout } \varphi \in \overline{H}^s,$$

et soit $(\psi_n)_{n\in N}$ une suite dans H convergeant vers ψ. La suite des opérateurs unitaires $(\pi_s(\delta_{\psi_n}))_{n\in N}$ converge fortement vers un opérateur U : pour tout $p\in N$ et tout $\varphi\in H$,

$$\|(\pi(\delta_{\psi_n}) - \pi(\delta_{\psi_{n+p}}))\hat{\delta}_\varphi\|^2 = 2(1 - \Re\exp\{i(\sigma(\psi_n,\psi_{n+p}) - \sigma(\varphi,\psi_n) - \sigma(\psi_{n+p},\varphi)) - \frac{1}{2}\|\psi_n - \psi_{n+p}\|^2\})$$

tend vers 0 quand n tend vers l'infini. D'après le corollaire du lemme 2.2 dans [3], ~~[illegible] dit que~~ U est unitaire. U commute à tous les $\pi(\delta_\varphi)$, $\varphi\in H$, à cause de la continuité forte des applications $S \to ST$ et $S \to TS$ et de la relation :

$$\pi_s(\delta_{\psi_n})\pi_s(\delta_\varphi) = \exp\{2i\sigma(\psi_n,\varphi)\}\pi_s(\delta_\varphi)\pi_s(\delta_{\psi_n}).$$

Par conséquent $U\in\pi_s(\overline{\Delta(H,\sigma)})'' \cap \pi_s(\overline{\Delta(H,\sigma)})'$. Cependant U n'est pas un multiple de l'identité car si $U = \lambda 1$, alors $|\lambda| = 1$, ce qui contredit :

$$|(\hat{\delta}_o | U\hat{\delta}_o)| = \exp\{-\frac{1}{2}\|\Psi\|_s^2\} < 1.$$

Donc π_s n'est pas une représentation factorielle.

3.3.2. (Quel que soit $s \in \mathcal{S}$, nous désignons par H_1 le noyau de $|D_s| - 1$ et par H_2 le supplémentaire orthogonal pour s de H_1 dans H (de telle sorte que l'on a : $\overline{\Delta(H,\sigma)} = \overline{\Delta(H_1,\sigma)} \otimes \overline{\Delta(H_2,\sigma)}$). Alors $\omega_s = \omega_1 \otimes \omega_2$, où $\omega_i = \omega_s | \overline{\Delta(H_i,\sigma)}$, $i=1,2$. En outre ω_1 est pur et ω_2 ne l'est pas.

La première assertion est immédiate puisque, pour tout $\psi \in H$, on a $\psi = \psi_1 + \psi_2$ où $\psi_i \in H_i$, $i=1,2$ et $\|\psi\|_s^2 = \|\psi_1\|_s^2 + \|\psi_2\|_s^2$, ce qui implique :

$$\omega_s(\delta_\psi) = \omega_1(\delta_{\psi_1})\omega_2(\delta_{\psi_2}).$$

ω_1 est un état de Fock (donc pur) de $\overline{\Delta(H_1,\sigma)}$ car $D_s|H_1 = J|H_1$.

La démonstration est achevée par le lemme suivant :

3.3.3. (Pour tout $s \in \mathcal{S}$, si $H_1 = \{0\}$ ω_s n'est pas pur.

L'image H_s de H par D_s étant partout dense, l'application

$$\psi \in H \longrightarrow \pi_s(\delta_\psi) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_s)$$

fortement continue, il suffit de prouver que $\omega_s | \Delta(H_s,\sigma)$ n'est pas pur (partie I, 1.2.3). Considérons les opérateurs

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|A_s| + 1)$$

$$T_2 = \frac{\Lambda}{\sqrt{2}}(|A_s| - 1), \qquad \text{(pour } \Lambda \text{ voir 2.2.3).}$$

Ils sont définis sur H_s et ont un domaine de valeurs dense dans H ; cette dernière propriété est évidente pour T_1 et se déduit pour T_2 de l'hypothèse du lemme. Ceci implique, par un raisonnement identique à celui de ([3], page 648), que la représentation π de $\overline{\Delta(H_s,\sigma)}$

dans $\mathcal{H}_{s_J} \otimes \mathcal{H}_{s_J}$ définie par :

$$\pi(\delta_\psi) = \pi_{s_J}(\delta_{T_1\psi}) \otimes \pi_{s_J}(\delta_{T_2\psi}), \quad \psi \in H_s$$

admet $\Omega_{s_J} \otimes \Omega_{s_J}$ pour vecteur cyclique. La représentation π' de $\overline{\Delta(H_s, \sigma)}$ dans $\mathcal{H}_{s_J} \otimes \mathcal{H}_{s_J}$ définie par :

$$\pi'(\delta_\psi) = \pi_{s_J}(\delta_{T_2\psi}) \otimes \pi_{s_J}(\delta_{T_1\psi}), \quad \psi \in H_s$$

admet également $\Omega_{s_J} \otimes \Omega_{s_J}$ pour vecteur cyclique et commute à π, qui n'est donc pas irréductible. Puisque l'on a :

$$\omega_s(\delta_\psi) = (\Omega_{s_J} \otimes \Omega_{s_J} | \pi(\delta_\psi)\Omega_{s_J} \otimes \Omega_{s_J})$$

on conclut que $\omega_s | \Delta(H_s, \sigma)$ n'est pas pur.

3.3.4. (ω_s est pur si et seulement si, c'est un état de Fock.

En effet, d'après ([4], 2.2), le produit tensoriel d'états est pur, si et seulement si, chaque état est pur.

3.3.5. (Pour tout $s \in \mathcal{S}$, ω_s est un état factoriel.

Il suffit de prouver que si $H_1 = \{0\}$, ω_s est factoriel (voir 3.3.2.). Soit L l'algèbre de von Neumann engendrée par π et L' celle engendrée par π'. Mais,

$$\pi(\delta_{T_1\psi})\pi'(\delta_{T_2\psi}) \text{ est multiple de } \pi_J(\delta_\psi) \otimes 1$$

et $$\pi(\delta_{T_2\psi})\pi'(\delta_{T_1\psi}) \text{ est multiple de } 1 \otimes \pi_J(\delta_\psi).$$

Par conséquent, tout opérateur de l'espace de représentation qui commute à π et à π' est multiple de l'unité :

$$\{L \cup L'\}' = L \cap L' = \mathbb{C}1.$$

APPENDICE

FORME LINEAIRE QUASI-LIBRE DE $\overline{\Delta(H,\sigma)}$

-:-:-:-:-:-:-:-

A.1. Dérivées

Soient H un espace vectoriel réel, E un espace de Banach réel et f une application de H dans E telle que l'application :

$$\lambda \in R \longrightarrow f(\varphi+\lambda\psi)$$

soit continue dans un voisinage de 0. Si cette dernière fonction admet une dérivée au point 0, nous la noterons $[Df(\varphi)](\psi)$ et dirons que c'est la dérivée de f au point φ dans la direction ψ. Il est clair que :

$$[Df(\varphi)](\psi)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(\varphi+\lambda\psi)-f(\varphi)}{\lambda}.$$

Si f admet une dérivée au point φ dans toutes les directions, nous dirons que f est différentiable au point φ et que l'application :

$$Df(\varphi) : \psi\in H \longrightarrow [Df(\varphi)](\psi)\in E$$

est la dérivée de f au point φ. Si f est différentiable en tous les points de H, nous dirons que f est différentiable et que l'application :

$$Df : \varphi\in H \longrightarrow Df(\varphi)$$

est la dérivée de f.

A.1.1. (Si f est différentiable en φ, $Df(\varphi)$ est une application
(
(linéaire de H dans E.

Nous allons prouver seulement que pour tout couple $(\psi_1,\psi_2)\in H\times H$,

$$[Df(\varphi)](\psi_1+\psi_2)=[Df(\varphi)](\psi_1)+[Df(\varphi)](\psi_2),$$

car la propriété :

$$[Df(\varphi)](\lambda\psi)=\lambda\,[Df(\varphi)](\psi)$$

pour tout $\lambda\in R$ et $\psi\in H$ est immédiate. D'aprés ([5], 8.9.1), les deux applications :

$$\lambda \longrightarrow f(\varphi+\lambda\psi_1) \quad \text{et} \quad \mu \longrightarrow f(\varphi+\mu\psi_2)$$

étant différentiables au point 0, l'application :

$$u\ :\ (\lambda,\mu) \longrightarrow f(\varphi+\lambda\psi_1+\mu\psi_2)$$

est différentiable au point (0,0) et

$$[Du(0,0)](s,t)=[Df(\varphi)](\psi_1)s+[Df(\varphi)](\psi_2)t.$$

Le résultat se déduit de cette dernière égalité, en remarquant que l'application :

$$\lambda \longrightarrow f(\varphi+\lambda\psi_1+\lambda\psi_2)$$

est la composition de l'application :

$$\lambda\in R \longrightarrow (\lambda,\lambda)\in R\mathrm{x}R$$

et de u.

A.2. Dérivées d'ordre supérieur

Supposons que f soit différentiable et que pour tout $\psi\in H$, l'application :

$$v_\psi\ :\ \varphi\in H \longrightarrow [Df(\varphi)](\psi)$$

soit différentiable au point φ_o. La dérivée de v_ψ au point φ_o dans la direction φ sera notée :

$$[D^2f(\varphi_o)](\psi,\varphi).$$

Nous dirons alors que f est deux fois différentiable en φ_o et que l'application :

$$D^2f(\varphi_o)\ :\ (\psi,\varphi)\in H\mathrm{x}H \longrightarrow [D^2f(\varphi_o)](\psi,\varphi)\in E$$

est la dérivée seconde de f en φ_o.

A.2.1. ($D^2f(\varphi_o)$ est une application bilinéaire, symétrique.

La bilinéarité de $D^2f(\varphi_o)$ se déduit immédiatement de A.1.1. Montrons que pour tout $(\psi_1,\psi_2) \in H \times H$,

$$[D^2f(\varphi_o)]\,(\psi_1,\psi_2) = [D^2f(\varphi_o)]\,(\psi_2,\psi_1).$$

Par hypothèse, toutes les dérivées partielles d'ordre deux de l'application u définie dans A.1.1 existent. Comme :

$$[Du(\lambda,\mu)]\,(s,t) = [Df(\varphi+\lambda\psi_1+\mu\psi_2)]\,(\psi_1)s + [Df(\varphi+\lambda\psi_1+\mu\psi_2)](\psi_2)t,$$

([5], 8.12.1, 8.12.8 et 8.12.7) montrent que u est deux fois différentiable et que ;

$$[D^2u(0,0)]\,((s',t'),(s,t)) = [D^2f(\varphi_o)]\,(\psi_1,\psi_1)ss' + [D^2f(\varphi_o)]\,(\psi_2,\psi_1)ts'$$
$$+[D^2f(\varphi_o)]\,(\psi_1,\psi_2)st' + [D^2f(\varphi_o)]\,(\psi_2,\psi_2)tt'.$$

La symétrie de $D^2f(\varphi_o)$ se déduit de cette dernière égalité et de ([5], 8.12.2).

Par récurrence sur p, on peut définir une application p fois différentiable en un point φ de H, comme une application f, p-1 fois différentiable et telle que l'application :

$$\psi \in H \longrightarrow [D^{p-1}f(\psi)]\,(\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_{p-1}) \in E$$

soit différentiable en φ pour tout $(\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_{p-1}) \in H^{p-1}$.

A.2.2. (Si f est p fois différentiable en φ, l'application $D^pf(\varphi)$
(est multilinéaire et symétrique.

Cette proposition se démontre par récurrence sur p.

A.3. Applications indéfiniment différentiables

Nous dirons que f est indéfiniment différentiable, si pour tout $\varphi \in H$ et tout p, f est p fois différentiable en φ.

Soit f une application indéfiniment différentiable de H dans C(corps des complexes). Nous définissons les dérivées tronquées de f par la formule de récurrence :

$$[D^p f(0)](\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_p) = \sum f_T^{(i_1)}(\psi_{1_1},\ldots,\psi_{1_{i_1}})\ldots f_T^{(i_q)}(\psi_{q_1},\ldots,\psi_{q_{i_q}})$$

où $i_1+i_2+\ldots+i_q = p$, où la somme est étendue à toutes les partitions de l'ensemble $\{1,2,\ldots,p\}$ et où les suites $\{(k_1,\ldots,k_{i_k})\,|\,k=1,\ldots,q\}$ sont croissantes.

A.3.1. (Les dérivées tronquées sont des applications multilinéaires symétriques.

Cette proposition se démontre par récurrence.

A.3.2. (Si f est une application indéfiniment différentiable de H dans C, telle que $f(0)=1$ et

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} f_T^{(p)}(\psi,\psi,\ldots,\psi)$$

existe pour tout $\psi \in H$, alors,

$$f(\psi) = \exp\left\{\sum_1^{\infty} \frac{1}{p!} f_T^{(p)}(\psi,\psi,\ldots,\psi)\right\}.$$

La formule de Taylor implique :

$$f(\lambda\psi) = 1+\lambda[Df(0)](\psi) + \frac{\lambda^2}{2!}[D^2f(0)](\psi,\psi) + \ldots$$

De plus :

$$\exp\{\alpha\} = 1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2!}+\ldots \quad \text{où } \alpha=\sum_1^{\infty}\frac{\lambda^p}{p!} f_T^{(p)}(\psi,\psi,\ldots,\psi).$$

([5], 9.2.1) permet d'identifier les coefficients de λ^p, ce qui donne la formule de récurrence définissant les dérivées tronquées dans le cas particulier où $\psi_1=\psi_2=\cdots=\psi_p=\psi$.

Dans le paragraphe suivant nous aurons besoin de la proposition suivante que nous appliquerons aux dérivées tronquées.

A.3.3. (Si g est une application multilinéaire symétrique de H^p dans E (H et E étant des espaces vectoriels réels) et si $g(\psi,\psi,\ldots,\psi)=0$ pour tout $\psi\in H$, alors $g=0$.

Soit $(\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_p)$ un élément quelconque de H^p ; nous allons montrer que $g(\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_p)=0$. Posons :

$$\psi = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \psi_i$$

où les λ_i $(i=1,\dots,p)$ sont des éléments quelconques de R. Par hypothèse, $g(\psi,\dots,\psi)$ est un polynôme homogène, nul, de p variables et de degrés p. Donc tous les coefficients sont nuls, en particulier celui de $\prod_{i=1}^{p} \lambda_i$ qui est un multiple de $g(\psi_1,\dots,\psi_p)$ puisque g est symétrique.

A.4. Forme linéaire quasi-libre

Soit f une application de H dans C, telle que $f(0)=1$. Nous dirons qu'elle est quasi-libre, si elle est indéfiniment différentiable et si $f_T^{(p)}=0$ pour $p>2$. Donc une application quasi-libre est de la forme :

$$f(\psi)=\exp\left\{f_T^{(1)}(\psi)+\frac{1}{2}f_T^{(2)}(\psi,\psi)\right\} \quad \text{pour tout} \quad \psi\in H.$$

A.4.1. Soit f une application indéfiniment différentiable telle que $f(0)=1$ et $f_T^{(p)}(\psi,\dots,\psi)=0$ pour tout $\psi\in H$ et tout $p\geq n_0>2$. Si $f\in\mathcal{F}_0$ (partie II, 3.2), $f_T^{(p)}=0$ pour tout $p>2$.

Dans [6] il est prouvé que si $f\in\mathcal{F}_0$, $f_T^{(p)}(\psi,\dots,\psi)=0$ pour tout $\psi\in H$ et tout $p>2$. La proposition se déduit de A.3.1 et A.3.3. f est donc une application quasi-libre et ω_f (partie II, 3.2) sera appelé "état quasi-libre".

R E F E R E N C E S   IV

-:-:-:-:-:-:-

1 D. W. Robinson ; Comm. Math. Physics 1, 159 (1965).

2 D. Kastler ; Comm. Math. Physics 1, 14 (1965).

3 H. Araki and E. J. Woods ; J. Math. Physics 4, 637 (1963)

4 A. Guichardet ; Ann. Scient. E. N. S. 83, 1 (1966).

5 J. Dieudonné ; Fondements de l'analyse moderne , Gauthier-Villars Paris (1963).

6 D. W. Robinson ; Comm. Math, Physics 1, (1965).