C. R. Acad. Sc. Paris, t. 267, p. 360-362 (5 août 1968). Série B

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Étude des systèmes de spins.* Note (*) de MM. **Jérôme Manuceau** et **Jean-Claude Trotin**, transmise par M. Alfred Kastler.

Ce travail concerne un système d'électrons disposés sur un réseau. Nous classons les états invariants par les automorphismes spatiaux, de la C^*-algèbre du système considéré et montrons que les hamiltoniens formels d'Ising et d'Heisenberg induisent un groupe d'automorphismes de la C^*-algèbre. Nous identifions les états invariants par ce groupe et déterminons les états pour lesquels l'hamiltonien de la représentation associée est positif.

L'objet de cette étude est l'analyse d'un système d'électrons dont on néglige le mouvement, et de disposition suffisamment régulière pour être assimilée à celle d'un réseau. On suppose en outre le système invariant par les permutations de tout nombre fini de points.

1. La C^*-algèbre et les états invariants du système. — Chaque électron n'ayant que deux états physiques possibles (spin « en haut » et « en bas »), on lui associe l'algèbre de Clifford $\mathcal{A}$ des matrices 2×2. Le cadre algébrique du problème est fourni par le produit tensoriel infini de cette algèbre-type : $\mathcal{F} = \bigotimes_{i\in Z^\nu} \mathcal{A}_i$, où $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}$ pour tout i, ν étant la dimension du réseau.

Posons : $\sigma_i^\alpha = \bigotimes_{j\in Z^\nu} \gamma_j$, où γ_j est l'identité de $\mathcal{A}$ pour $j\neq i$, et γ_i est la matrice σ^α de Pauli ($\alpha = 1, 2, 3$).

L'algèbre $\mathcal{F}$, algèbre locale, est engendrée par les produits finis de tels éléments. Une seule norme de C^*-algèbre $[\|\gamma^*\gamma\| = \|\gamma\|^2]$ est possible sur cette algèbre. En complétant on obtient la C^*-algèbre $\overline{\mathcal{F}}$ du système.

Soit $\mathfrak{S}$ le groupe des permutations d'un nombre fini de points de Z^ν; pour tout $p\in\mathfrak{S}$, l'application $\sigma_i^\alpha \to \sigma_{p(i)}^\alpha$ pour tout $i\in Z^\nu$, s'étend en un automorphisme unique ζ_p de $\overline{\mathcal{F}}$.

Un premier lemme permet de caractériser les états de $\mathcal{A}$. Posons $\uparrow = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\downarrow = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ la base naturelle de $\mathbf{C}^2$ et soit π la représentation de $\mathcal{A}$ dans $\mathbf{C}^4$ définie par

$$\pi(\sigma^\alpha) = \sigma^\alpha \oplus \sigma^\alpha.$$

Lemme 1. — *L'état positif le plus général de* $\mathcal{A}$ *est le suivant :*

$$\textit{pour tout } \gamma\in\mathcal{A} : \quad \rho_{a,b,c}(\gamma) = (a\uparrow + b\downarrow \oplus c\uparrow \,|\, \pi(\gamma) \,|\, a\uparrow + b\downarrow \oplus c\uparrow)$$

(*avec* $c = 0$ *si* $b = 0$), *où* $a\in\mathbf{C}$, b *et* $c\in\mathrm{R}^+$, *avec* $|a|^2 + b^2 + c^2 = 1$. *Les états purs sont ceux pour lesquels* $c = 0$.

Le théorème suivant permet une paramétrisation des états de $\overline{\mathcal{F}}$ invariants par le groupe des automorphismes spatiaux (induits par $\mathfrak{S}$).

THÉORÈME 1. — *Les états de $\overline{\mathscr{F}}$ invariants par le groupe des automorphismes spatiaux sont de la forme :* $\bigotimes_{i \in Z^\nu} \omega_i$, *où* $\omega_i = \rho_{a, b, c}$ *pour tout* $i \in Z^\nu$. *Ces états sont factoriels; on les notera* $\omega_{a, b, c}$. *Ils se classent de la manière suivante :*

(1) *Les états purs sont les états* $\omega_{a, b, c}$. *Parmi ceux-ci les états de Fock sont les états* $\omega_{0, 0, 1}$ *et* $\omega_{0, 1, 0}$ *(ils s'annulent sur les produits impairs de* σ_i^α*);*

(2) $\omega_{0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}}$ *est l'état central; il est de type* II_1*;*

(3) $\omega_{a, b, c}$, *où* $b \neq c$, $b \neq 0$ *et* $c \neq 0$, *sont de type* III [*leur étude est faite dans* (1), *dans le cas où* $a = 0$].

2. INTRODUCTION A LA DYNAMIQUE. — Les deux hamiltoniens formels que nous étudions sont H_I et H_H

$$H_I = \sum_{r=1} \sum_{i_1, \ldots, i_{2r} \in Z^\nu} g_{i_1, \ldots, i_{2r}} \sigma_{i_1}^3 \ldots \sigma_{i_{2r}}^3,$$

$$H_H = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{i_1, \ldots, i_{2r} \in Z^\nu} g'_{(i_1 i_2) \ldots (i_{2r-1} i_{2r})} (\vec{\sigma}_{i_1} . \vec{\sigma}_{i_2}) \ldots (\vec{\sigma}_{i_{2r-1}} . \vec{\sigma}_{i_{2r}})$$

$$\vec{\sigma}_i . \vec{\sigma}_j = \sum_{\alpha=1}^{3} \sigma_i^\alpha \sigma_j^\alpha,$$

où tous les coefficients sont négatifs, les coefficients $g_{i_1, \ldots, i_{2r}}$ étant complètement symétriques dans leurs indices, les coefficients $g'_{(i_1 i_2) \ldots (i_{2r-1} i_{2r})}$ l'étant dans les couples d'indices et aussi dans les transpositions internes des couples et tous étant invariants par les translations de leurs indices.

Les sommes $S_r = \sum_{\hat{i}_j} | g_{i_1, \ldots, i_{2r}} |$, $S'_r = \sum_{\hat{i}_j} | g'_{(i_1, \ldots, i_{2r})} |$, cette sommation portant sur tous les indices sauf l'un d'entre eux i_j (l'invariance par translation des indices fait que cette somme ne dépend pas de l'indice manquant), sont telles que

$$\sum_{k=1}^{\infty} k S_k < \infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k 3^k S'_k < \infty,$$

H_I est une généralisation de l'hamiltonien d'Ising, tandis que H_H est l'hamiltonien d'Heisenberg.

La substitution du hamiltonien d'Ising à celui d'Heisenberg réduit le nombre d'états invariants temporels, et aussi celui des états pour lesquels le hamiltonien de la représentation associée est positif. On se borne ici à l'exposé des résultats concernant le modèle d'Ising. Le modèle d'Heisenberg sera exposé ultérieurement.

L'invariance par translation implique que H_I et H_H ne sont pas des éléments de $\overline{\mathscr{F}}$. Par contre, l'opérateur $\mathrm{ad}\, H_I (\mathrm{ad}\, H_I (\gamma) = [H_I, \gamma]_-$ pour tout $\gamma \in \mathscr{F}$) est un opérateur de $\mathscr{F}$.

THÉORÈME 2. — *$\forall_i \in Z^\nu$ et $\alpha = 1, 2, 3$, la série de Dyson*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} [\mathrm{ad}^n \mathrm{H}]\, \sigma_i^\alpha$$

est absolument convergente.

De plus, les opérateurs $\tau(t) = \exp\{it\,\mathrm{ad}\mathrm{H}_\mathrm{I}\}$ $(t \in \mathrm{R})$ sont des automorphismes de $\overline{\mathcal{F}}$: ils vérifient : $\tau(t)\tau(t') = \tau(t+t')$, et constituent le groupe temporel.

THÉORÈME 3. — *Un état ω de $\overline{\mathcal{F}}$ est invariant pour le groupe temporel si et seulement si*

$$\omega \circ \mathrm{ad}\,\mathrm{H} = 0.$$

Alors

$$\pi_\omega(\tau(t)\,\gamma) = \exp\{it\mathrm{H}_\mathrm{I}^{(\pi)}\}\,\pi(\gamma)\exp\{-it\mathrm{H}_\mathrm{I}^{(\pi)}\}, \qquad \text{où} \quad \mathrm{H}_\mathrm{I}^{(\pi)}\hat{\gamma} = \widehat{\mathrm{ad}\,\mathrm{H}_\mathrm{I}(\gamma)},$$

$\hat{\gamma}$ étant l'image canonique de γ dans l'espace de représentation de π. Cet opérateur $\mathrm{H}_\mathrm{I}^{(\pi)}$, appelé hamiltonien dans la représentation π, est hermitien non borné.

THÉORÈME 4. — *Les seuls états $\omega_{a,b,c}$ invariants par le groupe temporel sont les états de Fock, l'état central et les états $\omega_{0,b,c}$, b et $c \neq 0$, $b \neq c$.*

(1) *Pour les états de Fock, l'hamiltonien est un opérateur positif.*

(2) *Pour l'état central, cet opérateur est nul.*

(3) *Pour les états $\omega_{0,b,c}$, les valeurs moyennes de l'hamiltonien ne sont bornées ni inférieurement, ni supérieurement.*

Les démonstrations détaillées paraîtront ultérieurement.

(*) Séance du 15 juillet 1968.

(1) R. T. POWERS, *Ann. Math.*, 86, 1967, p. 138.

(*Laboratoire de Physique théorique, Faculté des Sciences, place Victor-Hugo, Marseille, Bouches-du-Rhône.*)

178076. — Imp. GAUTHIER-VILLARS. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.