Centre de Physique Théorique
Marseille

DECOMPOSITION SPECTRALE DES OPERATEURS FERMES ET ANALYSE CANONIQUE

Alain Arconte*

Jérome Manuceau*

Daniel Testard**

Unité Propre de Recherche 7061

Abstract : We describe the mathematical underlying structure of the Canonical Analysis in terms of the spectral theory of closed operators in Hilbert spaces. This allows to treat on the same footing, the continuous and the pure point spectrum cases.

October 1991
CPT-91/P.2599

* Université des Antilles et de la Guyane UFR Sciences Exactes et Naturelles
Département de Mathématiques et Informatique
B.P. 592
97167 Pointe à Pitre Cedex GUADELOUPE.

** et Université Aix-Marseille II.

CNRS Luminy – Case 907 – CPT – F 13288 Marseille Cedex 9 – France

INTRODUCTION

L'étude de la position relative de deux sous-espaces vectoriels fermés d'un espace de Hilbert a été abordée, il y a déjà longtemps, notamment par J. DIXMIER [5] et P.R. HALMOS [7]. Elle a été aussi abordée dans le cadre de l'analyse canonique par F. CAILLIEZ et J.P. PAGES [2] ou J. DAUXOIS et A. POUSSE [3] par exemple.

En fait, ce problème qui est très général, se rencontre dès qu'il s'agit d'étudier un opérateur fermé et il se ramène à la "décomposition spectrale généralisée" que nous introduisons.

Résumé

Dans le premier paragraphe nous montrons que tout opérateur borné entre espaces de Hilbert, de norme inférieure ou égale à 1 est, à un opérateur unitaire près, produit de deux projecteurs orthogonaux. L'étude d'un opérateur borné se ramène alors à l'étude de la position relative de deux sous-espaces vectoriels fermés d'un espace de Hilbert (analyse canonique).

Dans les paragraphes deux et trois, nous généralisons la notion de décomposition spectrale à tout opérateur fermé entre espaces de Hilbert, ce qui nous permet de retrouver très simplement les résultats de l'analyse canonique discrète et de les généraliser au cas non purement discret.

1. Opérateurs bornés

1.1. Proposition

Tout opérateur borné entre espaces de Hilbert, de norme inférieure ou égale à 1, admet un prolongement par 0 qui s'écrit à un opérateur unitaire près, comme produit de deux projecteurs orthogonaux.

Démonstration

Remarquons tout d'abord que si H est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert, P_H le projecteur orthogonal sur H, U un opérateur unitaire, alors

$$U^* P_H U = P_{U^* H}$$

Si H_1 et H_2 étant deux espaces de Hilbert et u un opérateur borné de H_1 dans H_2 de norme inférieure ou égale à 1, on a

- $A = (I_{H_1} - u^* u)^{1/2}$ et $B = (I_{H_2} - uu^*)^{1/2}$ sont des opérateurs positifs de H_1 et H_2 respectivement, de norme inférieure ou égale à 1
- $uA = Bu$
- $U = \begin{pmatrix} A & -u^* \\ u & B \end{pmatrix}$ est un opérateur unitaire de $H_1 \oplus H_2$

- Si on pose $\tilde{u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{u}_{/H_1} = u$ $\tilde{u}_{/H_2} = 0$ $\tilde{u} = P_{H_2} U P_{H_1}$ avec $P_{H_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P_{H_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit que $\tilde{u} = UU^* P_{H_2} U P_{H_1} = U P_{U^* H_2} P_{H_1}$.

1.2. Corollaire

Tout opérateur hermitien positif A d'un espace de Hilbert H admet un prolongement par 0 à un autre espace de Hilbert $\mathcal{H}$, contenant H, de la forme $P_H\ P_F\ P_H$ où F est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$.

Dans toute la suite, nous noterons $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels fermés de $\mathcal{H}$ et $u = P_{F_2} P_{F_1}$. Evidemment $\|u\| \le 1$, $Ker\ u = F_1^\perp \oplus F_1 \cap F_2^\perp$ et $Ker\ u^* = F_2^\perp \oplus F_2 \cap F_1^\perp$.

Si on note $H_1 = F_1 \ominus F_1 \cap F_2^\perp$ et $H_2 = F_2 \ominus F_2 \cap F_1^\perp$, alors $H_1 \cap H_2^\perp = H_2 \cap H_1^\perp = \{0\}$ et $u = P_{H_2} P_{H_1}$.

Ainsi u est parfaitement défini par H_1 et H_2. Nous pouvons dorénavant supposer que

$$F_1 \cap F_2^\perp = F_2 \cap F_1^\perp = \{0\} \qquad (*)$$

ce qui entraine que $\dim F_1 = \dim F_2$.

Nous avons donc ramené l'étude d'un opérateur borné entre espaces de Hilbert à celle de la position relative de deux sous-espaces vectoriels fermés F_1 et F_2 d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. F_1 et F_2 vérifiant la relation (*). Cette étude est appelée ***analyse canonique** de* (F_1, F_2). Il est clair que si U est un opérateur unitaire quelconque, alors, l'analyse canonique de (UF_1, UF_2) est identique à celle (F_1, F_2) puisque UF_1 et UF_2 vérifient (*) et que $P_{UF_2} P_{UF_1} = U P_{F_2} P_{F_1} U^*$.

2. ANALYSE CANONIQUE (OU DECOMPOSITION SPECTRALE DISCRETE)

On dira que l'analyse canonique de (F_1, F_2) est discrète si $sp(A_1)$ est discret où $A_1 = u^*u = P_{F_1} P_{F_2} P_{F_1}$. Si en outre $A_2 = uu^* = P_{F_2} P_{F_1} P_{F_2}$, $sp(A_1) = sp(A_2)$ et on établit facilement la proposition :

2.1. Proposition (Analyse canonique discrète)

Si $A_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i P_{H_1^i}$ *et* $A_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i P_{H_2^i}$ *où* $\forall i \in \mathbf{N},\ \alpha_i \in]O, 1]$ *alors :*

i) $F_1 = \bigoplus_{i=0}^{\infty} H_1^i$ et $F_2 = \bigoplus_{i=0}^{\infty} H_2^i$

ii) $\forall i \in \mathbf{N}$ $P_{H_2}(H_1^i) = H_2^i$ *et* $P_{H_1}(H_2^i) = H_1^i$

iii) $\forall (i,j) \in \mathbf{N}^2$ *si* $i \neq j$ *alors* $H_1^i \perp H_2^j$

iv) $\forall i \in \mathbf{N}$, $cos\left(\widehat{H_1^i H_2^i}\right) = \sqrt{\alpha_i}$ *c.à.d.*

$$\forall x \in H_1^i \quad , \quad \forall y \in H_2^i \quad \|P_{F_2}(x)\| = \sqrt{\alpha_i}\,\|x\| \quad et \quad \|P_{F_1}(y)\| = \sqrt{\alpha_i}\,\|y\|.$$

L'analyse canonique discrète de (F_1, F_2) permet donc de décomposer F_1 et F_2 en sommes directes de sous-espaces et donne "l'angle formé par ces sous-espaces".

2.2. Corollaire

i) $\forall i \in \mathbf{N}, \quad \dim H_1^i = \dim H_2^i$

ii) $\forall i \in \mathbf{N}$, $Q_i = \frac{1}{\sqrt{\alpha_i}} P_{H_2^i} P_{H_1^i}$ *est une isométrie partielle de* H_1^i *sur* H_2^i (*c.à.d.* $Q_i^* Q_i = P_{H_1^i}$ *et* $Q_i Q_i^* = P_{H_2^i}$) *et* $u = \sum\limits_{i=O}^{\infty} \sqrt{\alpha_i}\, Q_i$. *C'est la décomposition spectrale de* u.

iii) Cette décomposition spectrale existe et est unique pour tout opérateur borné u *tel que* $sp(u^*u)$ *est discret.*

Remarques

1) La proposition 2.1 généralise toutes les analyses canoniques et factorielles.

2) La décomposition spectrale considérée dans le corollaire 2.2 apparait dans la théorie de la décomposition spectrale des opérateurs compacts de Riesz (J. DIEUDONNE [4]). Elle a par ailleurs été considérée dans le cas des opérateur à carré traçable, dans des problèmes de tri de données pour des systèmes complexes en mécanique des fluides (N. AUBRY - R. GUYONNET - R. LIMA [6]) et même plus récemment pour les mêmes auteurs dans un cadre continu [9].

3. ANALYSE CANONIQUE DANS LE CAS GENERAL

Considérons un opérateur fermé u d'un espace de Hilbert H_1 dans un autre H_2 et densément défini dans H_1. Pour simplifier l'énoncé du théorème ci-dessous, nous supposons que u et u^* sont injectifs si bien que $val(u)$ et $val(u^*)$ sont denses dans H_2 et H_1 respectivement.

3.1. Théorème

Avec les hypothèses et notations ci-dessus, il existe une unique famille $\Omega = \{\Omega(\lambda)\ ;\ \lambda \in \mathbf{R}^+\}$ ***satisfaisant aux propriétés suivantes :***

i) $\forall \lambda \in \mathbf{R}^+$, $\Omega(\lambda)$ *est un opérateur partiellement isométrique de* H_1 *dans* H_2. *Nous noterons* $P(\lambda) = P_{H_1^\lambda} = \Omega(\lambda)^*\Omega(\lambda)$ *le projecteur initial et* $Q(\lambda) = P_{H_2^\lambda} = \Omega(\lambda)\Omega(\lambda)^*$ *le projecteur final de* $\Omega(\lambda)$.

ii) Ω *et* Ω^* *sont continus à droite au sens de la topologie forte des opérateurs*

iii) Ω *est croissante au sens suivant :* $\forall \lambda \in \mathbf{R}^+$, $\forall \lambda' \in \mathbf{R}^+$ *si* $\lambda \leq \lambda'$ *alors* $H_1^\lambda \subset H_1^{\lambda'}$ *et* $\Omega(\lambda')_{/H_1^\lambda} = \Omega(\lambda)_{/H_1^\lambda}$ (*et par suite* $H_2^\lambda \subset H_2^{\lambda'}$)

iv) $\Omega(0) = 0, \quad s.\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \Omega(\lambda) = (u^*u)^{-1/2}u \quad et \quad s.\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \Omega(\lambda)^* = u^*(uu^*)^{-1/2}$

v) $u = \int_0^{+\infty} \lambda d\Omega(\lambda)$ *où l'intégrale est définie au sens faible de Stieltjes c.à.d.* $\forall(\psi_1, \psi_2) \in H_1 \times H_2, \quad \lambda \rightarrow < \psi_2 \mid \Omega(\lambda)\psi_1 >$ *est une fonction de répartition et :*

$$< \psi_2 \mid u\psi_1 > = \int_0^{+\infty} \lambda d < \psi_2 \mid \Omega(\lambda)\psi_1 >$$

En outre, $\forall \lambda \in \mathbf{R}^+$:

$$\overline{uP(\lambda) = Q(\lambda)u}$$
$$\overline{u(F_1^\lambda) = F_2^\lambda}$$
$$\overline{u^*(F_2^\lambda) = F_1^\lambda}$$

Démonstration

Rappelons tout d'abord un résultat classique de la théorie des opérateurs (décomposi tion polaire d'un opérateur fermé) : u étant un opérateur fermé de H_1 dans H_2, il existe un unique couple $(\mid u \mid, v)$ constitué d'un opérateur hermitien positif $\mid u \mid$ sur H_2 et d'une isométrie partielle v de H_1 dans H_2 tels que $u = \mid u \mid v$.

On sait que $\mid u \mid = (uu^*)^{1/2}$. En outre u et u^* étant injectifs, v est une isométrie de H_1 sur H_2.

Existence. Soit $Q(\lambda) = P_{H_2^\lambda}$ la famille des projecteurs spectraux de $\mid u \mid$ (NAIMARK [8]). $Q = \{Q(\lambda),\ \lambda \in \mathbf{R}^+\}$ est uniquement définie par les propriétés suivantes :

-) Q est fortement continue à droite

-) $Q(0) = 0 \quad s. \lim\limits_{\lambda \rightarrow +\infty} Q(\lambda) = I_{H_2}$

-) Q est croissante c.à.d. si $\lambda \leq \lambda'$ alors $H_2^\lambda \subset H_2^{\lambda'}$

-) $\mid u \mid = \int_0^{+\infty} \lambda dQ(\lambda)$ au sens faible de Stieltjes.

Posons $\Omega(\lambda) = Q(\lambda)v$; la famille $\{\Omega(\lambda),\ \lambda \in \mathbf{R}^+\}$ satisfait aux propriétés énoncées.

i) est évidente et on remarque que $P(\lambda) = \Omega(\lambda)^*\Omega(\lambda) = v^*P_{H_2^\lambda}v = P_{v^*\ H_2^\lambda}$ d'où $H_1^\lambda = v^*H_2^\lambda$.

ii), iv), et v) se vérifient facilement puisque $v = (uu^*)^{-1/2}u$.

iii) est vraie car la famille $\{Q(\lambda),\ \lambda \in \mathbf{R}^+\}$ est croissante.

Remarquons enfin que $Q(\lambda)v = vP(\lambda)$ et puisque $Q(\lambda)$ commute avec uu^*, on a bien $Q(\lambda)u = uP(\lambda)$. Ceci montre que $Q(\lambda)u = uP(\lambda)$ et par suite $P(\lambda)u^* = u^*Q(\lambda)$. On en déduit que $u(H_1^\lambda) \subset H_2^\lambda$ et que $u^*(H_2^\lambda) \subset H_1^\lambda$. Cela montre que

$$u(H_1^\lambda)^\perp \cap H_2^\lambda \subset ker\ u^* = \{0\}$$
$$u^*(H_2^\lambda)^\perp \cap H_1^\lambda \subset ker\ u = \{0\}$$

d'où :

$$\overline{u(H_1^\lambda)} = H_2^\lambda \quad \text{et} \quad \overline{u^*(H_2^\lambda)} = H_1^\lambda$$

Unicité. Soit une famille $\{\Omega(\lambda),\ \lambda \in \mathbf{R}^+\}$ vérifiant les cinq propriétés de l'énoncé, (iii) permet de définir $v\ :\ \bigcup_{\lambda \in \mathbf{R}^+} H_1^\lambda \to H_2$ par $\forall \lambda \in \mathbf{R}^+ \quad v_{/H_1^\lambda} = \Omega(\lambda)_{/H_1^\lambda}$.

Il est clair que v se prolonge en une isométrie de H_1 sur H_2 et que :

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}^+ \quad Q(\lambda)v = vP(\lambda) = \Omega(\lambda)$$

L'injectivité de u et u^*, (u) et (iv) montrent que $s.\lim_{\lambda \to +\infty} Q(\lambda) = I_{H_2}$ d'où $v = (uu^*)^{-1/2}u$ et $u = (uu^*)^{1/2}v$.

Pour montrer que $Q(\lambda)$ est la famille spectrale associée à $|\ u\ |$ on utilise (v). En effet $\forall(\psi, \varphi) \in H_2^2$

$$\begin{aligned} < \psi \mid u \mid \varphi > =< \psi / uv^*\varphi > &= \int_0^\infty \lambda\ d < \psi \mid \Omega(\lambda)v^*\varphi > \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda\ d < \psi \mid Q(\lambda)\varphi > \end{aligned}$$

3.2. Corollaire : Analyse Canonique Généralisée

Si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels fermés quelconques d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ vérifiant (*), il existe deux familles croissantes de sous-espaces vectoriels fermés de $\mathcal{H}$, $(F_1^\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}^+}$ et $(F_2^\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}^+}$ telles que

i) $F_1^0 = F_2^0 = \{0\} \quad F_1 = \overline{\bigcup_\lambda F_1^\lambda}$ *et* $F_2 = \overline{\bigcup_\lambda F_2^\lambda}$

ii) $\forall \lambda \in \mathbf{R}^+ \quad \overline{P_{F_2}(F_1^\lambda)} = F_2^\lambda$ *et* $\overline{P_{F_1}(F_2^\lambda)} = F_1^\lambda$

iii) $\forall \lambda \in \mathbf{R}^+, \quad \forall x \in F_1^\lambda$ *tel que* $\forall \mu \in \mathbf{R}^+, \quad \mu < \lambda \quad x \notin F_1^\mu$

$$\lim_{\mu \uparrow \lambda} \frac{\left\|P_{F_2}\left(x - P_{F_1^\mu}(x)\right)\right\|}{\|x - P_{F_1^\mu}(x)\|} = \lambda$$

iv) $\forall \lambda \in \mathbf{R}^+, \quad \forall y \in F_2^\lambda$ *tel que* $\forall \mu \in \mathbf{R}^+, \quad \mu < \lambda \quad y \notin F_2^\mu$

$$\lim_{\mu \uparrow \lambda} \frac{\left\|P_{F_1}\left(y - P_{F_2^\mu}(y)\right)\right\|}{\|y - P_{F_2^\mu}(y)\|} = \lambda$$

Démonstration. On applique 3.1. à $u = P_{F_2}P_{F_1} = \int_0^1 \lambda d\Omega(\lambda)$ et on note $P_{F_1^\lambda}$ (resp. $P_{F_2^\lambda}$) le projecteur initial (resp. final) de $\Omega(\lambda)$.

i) se déduit aisément de

$$s. \lim_{\lambda \to \infty} Q(\lambda) = I_{H_2}$$

ii) s'obtient en remarquant que

$$P_{F_2}(F_1^{\lambda}) = u(F_1^{\lambda})$$

et à l'aide de 3.1. (v).

Les démonstrations de iii) et iv) sont semblables, nous ne donnons que la preuve de iii).

$$\begin{aligned}
\|P_{F_2}(x - P_{F_1^{\mu}}(x))\|^2 &= \|u(x - P_{F_1^{\mu}}(x))\|^2 \\
&= < x - P_{F_1^{\mu}}(x) \mid u^{*}u(x - P_{F_1^{\mu}}(x)) >= \\
&= \int_{\mu}^{\lambda} \nu^2 d < x \mid (P_{F_1^{\nu}} - P_{F_1^{\mu}})x > \\
&= \int_{\mu}^{\lambda} \nu^2 d < x \mid P_{F_1^{\nu}} x >
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|x - P_{F_1^{\mu}}(x)\|^2 &= < x, P_{F_1^{\lambda}} x > - < x, P_{F_1^{\mu}} x > \\
&= \int_{\mu}^{\lambda} d < x \mid P_{F_1^{\nu}} x >
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\|P_{F_2}\left(x - P_{F_1^{\mu}}(x)\right)\|^2}{\|x - P_{F_1^{\mu}}(x)\|^2} = \frac{\int_{\mu}^{\lambda} \nu^2 d < x \mid P_{F_1^{\nu}}(x) >}{\int_{\mu}^{\lambda} d < x \mid P_{F_1^{\nu}}(x) >} = R_{\mu}(I^2)$$

où R_{μ} est une probabilité dont la moyenne est comprise entre μ et λ et dont la variance est inférieure ou égale à $(\lambda - \mu)^2$. On montre comme dans [1] que

$$R_{\mu} \underset{\mu \to \lambda}{\Rightarrow} \delta_{\lambda}$$

Ainsi

$$\lim_{\mu \uparrow \lambda} R_{\mu}(I^2) = \lambda^2$$

Remarque. Si λ est une valeur propre 3.2. iii) n'est autre que 2.1. iv). Ainsi 2.1. apparait comme un cas particulier de 3.2.

CONCLUSION

La généralisation de l'Analyse Canonique que nous avons obtenue à partir de l'analyse spectrale d'un opérateur fermé n'est pas celle de Dauxois et Pousse [3] basée elle sur la notion d'intégrale hilbertienne. L'analyse en Composantes Principales se ramenant à l'étude d'un opérateur nucléaire [1] est une analyse canonique discrète.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ARCONTE, J. MANUCEAU et C. MARTIAS : Approximation d'une probabilité sur un espace de Hilbert et Analyse en Composantes Principales. (à paraître).

[2] F. CAILLIEZ et J.P. PAGES : Introduction à l'analyse des données. SMASH (1976).

[3] J. DAUXOIS et A. POUSSE : Analyses factorielles en calcul des probabilités et en statistique. Thèse. Université Paul Sabatier Toulouse (1976).

[4] J. DIEUDONNE : Eléments d'Analyse.Gauthier.- Villars.Paris.

[5] J. DIXMIER : Position relative de deux variétés linéaires formées dans un espace de Hilbert. Rev. Sci. **86**, 387 (1948).

[6] N. AUBRY, R. GUYONNET, R. LIMA : Spatio-temporal analysis of complex signals : theory and applications. J. Stat. Phys. **63**, 3 (1991).

[7] P.R. HALMOS : Two Subspaces. Trans. Amer. Math. Soc. **144**, 381 (1969).

[8] M.A. NAIMARK : Normed rings. Noordhoff Pub. Co. Groningen The Netherlands (1964).

[9] N. AUBRY, R. GUYONNET, R. LIMA : On the turbulence spectra. Preprint CPT - Marseille 91/PE 2591.